Apunts de Mecànica Clàssica

ALM

Resum

Resum de l'assignatura de Mecànica Clàssica basat en els apunts de classe del Putu Bagan oscil·lant (PB) (temes 1–4) i el Putu Pineda rotatiu (PP) (temes 5–8). Degut als seus meravellosos dots explicatius d'ambdós dos, aquests apunts també estan basat bàsicament en el JB Mariona (PB sempre donant suport a la industria del Whisky) i el Goldstein/Symon/Kibble (perquè el PP es així de xulo i no pot fer servir el Mariona). Enjoy it! I sinó prova sort l'any següent amb el Crespito (o Lorente que es veu que ho fa molt be).

Mecànica Clàssica – UAB
23 de juny de 2018

Índex

1 Dinàmica de Newton

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{x}}(t) \quad , \quad \dot{\boldsymbol{p}} = F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

Temps discret Si considerem el temps no de forma continua llavors $t_k = k\epsilon$

$$\begin{aligned} p_k = mv_k = m\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \quad &, \quad \frac{p_{k+1} - p_k}{\epsilon} = F(x_k, \frac{p_k}{m}, k) \\ x_{k+1} = x_k + \epsilon\frac{p_k}{m} \quad &, \quad p_{k+1} = p_k + \epsilon F(x_k, \frac{p_k}{m}, k) \end{aligned}$$

podem determinar que passarà l'instant següent coneixent el que ha passat l'instant anterior, **determinisme**.

Lleis de Newton

I Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed on them.

II The alteration of motion (acceleration) is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

III To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (pg. 83)

Moment lineal $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{x}} \rightarrow \boldsymbol{F} = \frac{dp}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}\frac{dm}{dt} + m\ddot{\boldsymbol{x}}$

Sistema de partícules $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i \rightarrow \boldsymbol{F}_T = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_i [\boldsymbol{F}_i^{ext} + \cancelto{0}{\sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{j\to i}}] \overset{(3a)}{=} \sum_i \boldsymbol{F}_i^{ext} = \boldsymbol{F}^{ext}$
En un sistema aïllat $\boldsymbol{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{P} = ct.$

1.1 Moviment circular

Un moviment circular uniformement accelerat es caracteritza per

$$\theta \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

En el cas que $\alpha = ct.$ trobem les següents relacions a partir de les expressions anteriors

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Totes les partícules roten amb la mateixa ω i α però la velocitat i acceleració tangencials (v i a) varien en funció de la distancia al centre de gir $\boldsymbol{r}_i$. Així podem aproximar la distancia recorreguda per $dS_i = r_i d\theta$ per tant

$$\begin{aligned} v_i^t &= \frac{dS_i}{dt} = r_i\frac{d\theta}{dt} = r_i\omega \\ a_i^t &= \frac{dv_i^t}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt} = r_i\alpha \\ a_i^c &= \frac{v_i^2}{r_i} = r_i\omega^2 \end{aligned}$$

Energia cinètica L'energia cinètica de rotació d'una partícula ve donada per $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$. L'energia cinètica total serà la suma per a totes les partícules:

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.1}$$

on definim I com el moment d'inèrcia, per al cas discret té l'expressió

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{1.2}$$

i per al cas continu

$$I = \int_V r^2 dm \to \begin{cases} dm = \lambda dl \\ dm = \sigma dS \\ dm = \rho dV \end{cases} \tag{1.3}$$

Teorema 1.1 (Steiner)**.** *Si coneixem el moment d'inèrcia d'un cos respecte el seu centre de masses I_{CM}, el moment d'inèrcia respecte qualsevol eix paral·lel a aquest serà $I = I_{CM} + MD^2$ on D és la distancia entre l'origen dels eixos.*

Demostració. Sigui $\boldsymbol{r}_i'$ la posició d'una particula respecte el CM, $\boldsymbol{r}_i$ la posició de la mteixa respecte un sistema de referencia SR i $\boldsymbol{R}$ el vector que uneix l'origen dels dos sistemes, podem escriure $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i' \to \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_i'$. Calculem l'energia cinètica:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i')^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(v_i')^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\cancelto{0}{\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i'} \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(v_i')^2 = \frac{1}{2}MD^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[I_{CM} + MD^2\right]\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{on} \qquad I = I_{CM} + MD^2 \end{aligned}$$

□

Moment angular Sigui $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$ $(\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}_i)$ el moment angular de la partícula i és

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = m_i\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = m_i\left[(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_i\right] = m_i r_i^2\boldsymbol{\omega}$$

per tant

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i = \sum_i m_i r_i^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1.4}$$

El moment de la força serà

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = m\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dr} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right] = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = I\boldsymbol{\alpha} \tag{1.5}$$

1.2 Acreció de massa

En un temps t tenim una massa $m(t)$ movent-se a una velocitat $\boldsymbol{v}(t)$ i una altra massa dm que es mou a $\boldsymbol{u}(t)$, al cap d'un cert temps dt les dues masses queden unides

$$\boldsymbol{p}(t) = m(t)\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t)dm \longrightarrow \boldsymbol{p}(t) + d\boldsymbol{p} = (m(t) + dm)(\boldsymbol{v}(t) + d\boldsymbol{v})$$

$$[(\boldsymbol{p} + d\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}]/dt = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}[\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}(t)]$$

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}} + \dot{m}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \tag{1.6}$$

2 Oscil·ladors

2.1 Oscil·lador harmònic simple

$$F = -km = m\ddot{\boldsymbol{x}} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{k/m}$$
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.1}$$

que té com a solució
$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = A\cos(\omega t + \delta) \tag{2.2}$$

On les constants es poden determinar a partir de les condicions inicials $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, en aquest cas $c_1 = x_0$ i $c_2 = \dot{x}_0/\omega$ i, per la segona expressió, $A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega)^2}$ anomenada amplitud i $\delta = \arctan\big(\dot{x}_0/x_0\omega\big)$ anomenada desfasament inicial.

El període i la freqüència d'oscil·lació venen donats per les expressions següents:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Energia L'energia cinètica en un oscil·lador harmònic simple és

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta) \tag{2.3}$$

Per a l'energia potencial, si tenim un sistema sota l'acció d'un potencial $U(x)$ prop de l'equilibri $\Rightarrow U'(x_0) = 0$ i $U''(x_0) \geq 0$, té un mínim, per tant

$$U(x) = U(x_0) + \cancelto{0}{U'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 \overset{x'=x-x_0}{\approx} \frac{1}{2}kx^2$$

és a dir, que petits desplaçaments el voltant de la posició d'equilibri corresponen a oscil·lacions d'un OHS. Per tant, substituint x segons (2.2) obtenim

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\cos^2(\omega t + \delta) \tag{2.4}$$

L'energia mecànica serà igual a la suma de l'energia cinètica i potencial:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \tag{2.5}$$

on veiem que aquesta és constant en el temps, només depèn de l'amplitud inicial.

Pèndol $F = -mg\sin(\theta) = mL\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) \overset{\theta\to 0}{\simeq} \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ on $\omega^2 = g/L$.

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \delta) \xrightarrow{\times L} S = S_0\cos(\omega t + \delta)$$

aquesta equació només és valida per a angles petits, amb període $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Una manera de calcular el període del pèndol de manera general és fent servir energies, com que aquesta es conserva per (2.5) tenim que $U = mgh = mgL(1 - \cos(\theta))$ en $x_0 \to U(x_0) = 2mgL\sin^2(\theta_0/2)$ llavors $K = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 = 2mgL\sin^2(\theta_0/2)$ per tant

$$\dot{\theta} = \left[4\omega^2\left(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{d\theta}{dt}$$

integrant entre 0 i T i entre 0 i θ_0 però tenint en compte que fa 4 cops aquest recorregut ens dona com a resultat que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots\right) \sim 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

és a dir que la primera aproximació per a angles petits és suficientment bona ja que els termes següent ofereixen correccions molt petites.

2.2 Oscil·lador esmorteït

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \to \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.6}$$

Tornem a tenir una EDO lineal de 2n ordre, podem procedir pel mateix mètode, suposant $x = e^{st}$ trobem que $s = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, distingim tres casos:

- Subesmorteït: En aquest cas $\omega_0 > \beta \Rightarrow s = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega_1$ són dues solucions l.i. i per tant qualsevol combinació lineal també és solució:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t}\right] = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta) \tag{2.7}$$

  on en funció de les condicions inicials tenim $\tan(\delta) = \frac{x_0\omega}{\dot{x}_0 + \beta x_0}$ i $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega_1}\right)^2}$.

  El període és $T_1 = 2\pi/\omega_1 > T_0$; el factor d'extinció és el temps que tarda en reduir-se l'amplitud un factor e: $\tau = 1/\beta = 2m/b$; definim el factor de qualitat com $Q = \omega_0/2\beta = k/b$; i el nombre d'oscil·lacions necessàries per a que l'amplitud es redueixi en un factor e és $N_e = [Q/\pi]$.

- Sobreesmorteït: Ara $\omega_0 < \beta \Rightarrow s = -\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm \omega_2$ i per tant

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[c_1 e^{\omega_2 t} + c_2 e^{-\omega_2 t}\right] = e^{-\beta t}\left[c_1\cosh(\omega_2 t) + c_2\sinh(\omega_2 t)\right] \tag{2.8}$$

  on $c_1 = -[x_0(\beta - \omega_2) + \dot{x}_0]/2\omega_2$ i $c_2 = [x_0(\beta + \omega_2) + \dot{x}_0]/2\omega_2$, **no es produeixen oscil·lacions**.

- Crític: és el cas en que $\omega_0 = \beta$, si es dona aquest cas $s = -\beta$, només tenim una solució però $te^{-\beta t}$ també és solució i per tant

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t} \tag{2.9}$$

  on $c_1 = x_0(1 - \beta) + \dot{x}_0$ i $c_2 = x_0 + \dot{x}_0/\beta$

Factor de qualitat Quan $\beta \ll \omega_0$ l'energia de oscil·lador és

$$\begin{aligned} E &= U + K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \\ &= \frac{m}{2}e^{-2\beta t}[\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t + \delta) + \omega_0^2\cos^2(\omega_1 t + \delta)] \\ E &\overset{\omega_1 \simeq \omega_0}{=} \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \longrightarrow E(t) = E(0)e^{-2\beta t} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Si derivem l'expressió anterior en funció del temps trobem que

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| = 2\beta E(t) \to \frac{E}{\left|\frac{dE}{dt}\right|} = \frac{1}{2\beta}$$

l'energia que es dissiparà en un període serà $\Delta E = \left|\frac{dE}{dt}\right| T$, on $T = 2\pi/\omega_0$, combinant ambdues equacions trobem que el factor de qualitat és aproximadament $Q =\simeq 2\pi\frac{E}{\Delta E}$.

2.3 Oscil·lador forçat

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = F_0\cos(\omega t) \tag{2.11}$$

EDO lineal de segon ordre, si suposem $x = Ae^{st}$ i $F = F_0\,\mathrm{Re}\{e^{i\omega t}\}$ trobem com a solució estacionaria

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) \quad \begin{cases} A = F_0/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \\ \tan(\delta) = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2) \end{cases} \tag{2.12}$$

Si representem l'amplitud en funció de ω veiem que te un màxim a $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ que s'anomena la freqüència de ressonància, a aquesta freqüència el desfasament val $\delta = \frac{\pi}{2}$, és a dir, la força externa i el moviment del sistema estan en quadratura.

La solució anterior és en regim estacionari, la cap d'un temps llarg, però per a la solució general hem de tenir en compte la de l'oscil·lador esmorteït, que es farà 0 per a temps llargs; quan són comparables es diu que estem en regim transitori.

Factor de qualitat Considerem que $\omega \sim \omega_R \sim \omega_0$, en aquest cas trobem que l'energia de l'oscil·lador és $E = \frac{1}{2}kA^2$ (constant). Utilitzant l'aproximació anterior trobem que l'amplitud és aproximadament $A = \frac{F_0}{2\omega_0}[(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2]^{-1/2}$ i per tant $E = E_{max}\frac{\beta^2}{(\omega_0-\omega)^2+\beta^2}$ on $E_{max} = kF_0/4\omega_0\beta$. Aquesta funció té un màxim centrat a ω_0 entre $[\omega_0 - \beta, \omega_0 + \beta]$ la diferencia de freqüències en aquest interval val $\Delta\omega = 2\beta$ i podem expressar el factor de qualitat com $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$.

2.4 Principi de superposició

Si considerem un oscil·lador forçat sabem que obeeix l'equació diferencial

$$\mathbf{L}x(t) = F(t) \qquad : \qquad \mathbf{L} \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \tag{2.13}$$

on $\mathbf{L}$ és un operador lineal. Degut a aquesta linealitat sabem que si tenim $\mathbf{L}x_1 = F_1$ i $\mathbf{L}x_2 = F_2$ llavors $\mathrm{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$, podem estendre aquest fet a un nombre N d'oscil·ladors per obtenir

$$\mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{N} F_k$$

En el cas que tinguem una força periòdica de període T ($f(t) = f(t+T)$) amb $\omega = 2\pi/T$ llavors pel teorema de Fourier aquesta podran ser expressades en la forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n\omega t - \phi_k)$$

per tant, utilitzant els dos resultats anteriors juntament amb la solució trobada per al cas d'un oscil·ador forçat amb una força sinusoïdal (2.12) trobem que

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + (2\beta\omega_k)^2}}\cos(\omega_k t - \delta_k - \phi_k) \tag{2.14}$$

sent el valor d'aquestes constants donat per

$$\alpha_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad ; \qquad \tan\phi_k = \frac{b_k}{a_k} \tag{2.15}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(\omega_k t)dt \qquad ; \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(\omega_k t)dt \tag{2.16}$$

$$\tan\delta_k = 2\beta\omega_k/(\omega_0^2 - \omega_k^2) \tag{2.17}$$

2.5 Forces impulsives

De la mateixa manera que podem expressar una funció periòdica $f(t)$ com una suma serie de Fourier també podem fer el mateix com una serie de deltes de Dirac $\delta(t - t')$, així $f(t) \simeq \sum_{t'}^{\infty} f(t')\delta(t - t')$, d'aquesta manera si coneixem la solució general per d'un oscil·lador forçat per la $\delta(t - t')$ podem coneixer la solució general per a qualsevol oscil·lador.

Es pot demostrar (veure Marion pg. 141-146, *The response of linear oscillators to impulsive forcing functions*) que la solució general per una EDO del tipus $\mathbf{L}x = \delta(t - t')$ és la **funció de Green**

$$G(t - t') = \frac{\Theta(t - t')}{\omega_1}e^{-\beta(t-t')}\sin[\omega_1(t - t')] \tag{2.18}$$

on $\Theta(t-t')$ és la funció theta de Heaviside definida com

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \tag{2.19}$$

Així la solució per una força $F(t)$ general serà

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t')G(t-t')dt' \tag{2.20}$$

3 Forces centrals

Una força central és aquella que ve donada per una expressió del tipus

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\boldsymbol{e}_r \tag{3.1}$$

on $r = |\boldsymbol{r}|$ i $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ és el vector radial.

3.1 Problema dels dos cossos

Considerem dues partícules de massa m_1 y m_2 ubicades en les posicions $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ respecte a un origen $\mathcal{O}$ en un sistema de referencia inercial. El Lagrangià d'aquest sistema serà

$$L = K - U = \frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 - U(r) \tag{3.2}$$

Ara definim el vector centre de masses $\boldsymbol{R} = \frac{1}{M_T}[m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2]$ i $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, així les posicions de les partícules respecte el CM vindran donades per $\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$. Podem escollir que l'origen de coordenades sigui el CM, per tant, $\boldsymbol{R} \equiv 0 \Rightarrow m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$. Llavors, combinant aquestes relacions obtenim

$$\boldsymbol{r}_{1,2} = \mp\frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}$$

Substituint a l'eq. (3.2) dona lloc a

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - U(r) \tag{3.3}$$

on μ és la massa reduïda

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \longleftrightarrow \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.4}$$

Per a la resta del document considerarem el cas en que $m_1 \gg m_2$, és a dir, $\mu \approx m_2 = M$, tots els teoremes seran aplicables per al cas del problema dels dos cossos substituint $M \leftrightarrow \mu$.

3.2 Teoremes de conservació

Conservació del moment angular Considerem quin és el moment que fa la força (3.1) sobre una partícula caracteritzada per $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}} = (r\boldsymbol{e}_r)\times(F(r)\boldsymbol{e}_r) = rF(r)\cdot\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r = 0$$

és a dir

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = ct. \tag{3.5}$$

Podem aprofundir més en aquest resultat ja que si escrivim $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ llavors $\boldsymbol{L} = m\cdot\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$, sabem que per definició $\boldsymbol{r}\perp\dot{\boldsymbol{r}}$ i com que $\boldsymbol{L} = ct.$ llavors la direcció i el sentit de $\boldsymbol{L}$ sempre serà la mateixa, és a dir, el *moviment es produirà únicament en un pla* que vindrà definit pel vector posició i velocitat en un instant de temps $\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{L}_0 = m\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{v}_0$.

Suposem que només es mou en el pla xy llavors $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{e}_z$ i per tant $|\boldsymbol{L}| = |m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}| \to \frac{L}{m}dt = |\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}| = rdr_\perp = 2dA$ on $dA = rdr_\perp/2$ és l'àrea d'un triangle definit pels vectors $\boldsymbol{r}$ i $d\boldsymbol{r}$. A partir de l'ultima relació podem definir la **velocitat aerolar** o àrea escombrada com

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{l}{2} \tag{3.6}$$

Conservació de l'energia Vindrà donada pel fet de que tota força central és conservativa i no hi ha forces dissipatives.

Teorema 3.1. *Si $\boldsymbol{F}$ és una força central llavors $\boldsymbol{F}$ és conservativa.*

Demostració. $\int_{\boldsymbol{r}_i}^{\boldsymbol{r}_f} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt = \int_0^1 F(r(t)) \boldsymbol{e}_r \boldsymbol{r}'(t) dt = \int_0^1 F(r(t)) r'(t) dt = \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr = G(r_f) - G(r_i)$ □

Llavors es complirà

$$E = K + U = ct. \tag{3.7}$$

i que

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} \tag{3.8}$$

3.3 Moviment sota forces centrals

En coordenades polars $\boldsymbol{e}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ i $\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ de tal manera que $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta$ i $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta} \boldsymbol{e}_r$. Podem escriure els vectors posició, velocitat i acceleració en aquestes coordenades com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r \boldsymbol{e}_r \\ \dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r} \boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

Si substituïm a la segona llei de Newton $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r) \boldsymbol{e}_r = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ tenim

$$m(\ddot{\boldsymbol{r}} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \tag{3.9}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \tag{3.10}$$

multiplicant la segona equació per r tenim que

$$(r^2\dot{\theta})' = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = ct.$$

D'altra banda

$$L = |\boldsymbol{L}| = m|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}| = m|(r\boldsymbol{e}_r) \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)| = mr^2\dot{\theta} = ct.$$

per tant

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{l}{r^2} \tag{3.11}$$

Amb la primera equació (3.9) fent el canvi $u = 1/r$ de tal manera que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{l} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\dot{r}}{l} \right) = -\frac{1}{l\dot{\theta}} \ddot{r} = -\frac{r^2}{l^2} \ddot{r} \end{aligned}$$

obtenim **l'equació de l'òrbita**

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(1/u)}{ml^2u^2} \tag{3.12}$$

Podem calcular la velocitat a partir de la conservació de l'energia $E = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + U(r)$ on $|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + l^2/r^2$ llavors

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \left(U(r) + \frac{ml^2}{2r^2}\right)\right]} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_e(r)\right]} \tag{3.13}$$

on $U_e(r) = U(r) + \frac{ml^2}{2r^2}$ és el potencial efectiu i el segon terme es pot identificar com el potencial centrifug $\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$ degut a la força centrifuga que te el cos en donar voltes.

Utilitzant que $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{l}{r^2}$ podem expressar l'equació (3.13) com

$$d\theta = \pm\frac{l}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_e(r)\right]}}$$

Si el moviment és periòdic llavors r anirà des d'un cert r_{max} a un r_{min} i l'angle que haurà girat per tornar a la posició inicial serà (ja que $\dot{\theta} = l/r^2$ no pot canviar de signe)

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_e(r)\right]}} \tag{3.14}$$

quan $\Delta\theta = 2\pi p/q$ on $p/q \in \mathbb{Q}$ llavors l'òrbita serà tancada i q ens indica el nombre de voltes que es necessiten per tancar l'orbita, en qualsevol altre cas l'orbita serà oberta.

Si suposem una força del tipus $F \propto r^\beta$ en aquests casos la integral anterior tindrà solució.

Potencial efectiu Hem definit el potencial efectiu com

$$U_e(r) = U(r) + \frac{ml^2}{2r^2} \tag{3.15}$$

el segon terme el podem entendre com el potencial associat amb una força centrifuga *imaginaria* que està relacionat amb l'energia que es produeix quan la partícula gira al voltant del centre de la força. Aquesta força centrifuga ve donada per

$$F_c = -\frac{dU_c}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{ml^2}{2r^2}\right) = \frac{ml^2}{r^3} \overset{(3.11)}{=} mr\dot{\theta}^2$$

3.4 Tipus d'orbites

Tornant a l'equació de l'orbita $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(1/u)}{ml^2u^2} = \Psi(u)$ on $u = 1/r$ els diferents tipus d'orbites són:

- **Orbites circular**: En aquest cas el radi no depen del temps i per tant tampoc de θ, és a dir, $r = r_0 \Rightarrow u_0 = 1/r_0 = ct.$ per tant $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ és a dir que

  $$u_0 = \Psi(u_0) = -\frac{F(1/u_0)}{ml^2u_0^2} \to l^2 = -\frac{r_0^3}{m}F(r_0)$$

  Només en el cas que $F(r_0) \leq 0$ l'equació tindrà solució. Substituint l pel trobat a (3.11) i tenint en compte que $\dot{\theta} = 2\pi/T$ obtenim

  $$\dot{\theta}^2 = \frac{-F(r)}{mr} \longleftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{-F(r)}r \tag{3.16}$$

  que per al cas de la gravetat $F(r) = -GMm \cdot r^{-2}$ es converteix en la tercera llei de Kepler:

  $$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3 \tag{3.17}$$

- **Orbites quasicirculars**: suposem que es produeix un petita pertorbació en l'orbita circular anterior del tipus $u(\theta) = u_0 + \xi(\theta)$ on $\xi(\theta)/u_0 \ll 1$. D'aquesta manera $u'' = \xi''$ i podem fer un desenvolupament de $\Psi(u)$ en serie de Taylor de ξ per trobar $\Psi(u) = \Psi(u_0+\xi) = \Psi_0 + \Psi_0'\xi + \cdots$, substituint a l'equació de l'orbita queda

  $$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + u_0 + \xi = \Psi_0 + \Psi_0'\xi \to \frac{d^2\xi}{d\theta^2} + (1 - \Psi_0')\xi = 0 \tag{3.18}$$

  llavors quan $\alpha^2 = 1 - \Psi_0' > 0 \Leftrightarrow U_{ef}'' > 0$ les desviacions del radi seguiran un MHS de la forma $u = u_0 + \xi_0\cos(\alpha\theta)$.

En el cas que $\alpha \in \mathbb{Q}$ llavors l'òrbita serà tancada de període $T = \frac{2\pi}{\alpha}$, això és cert per a qualsevol $r_0 = 1/u_0$ el que implica que $\alpha = ct.$, no depèn de u_0.

Substituint a $1 - \alpha^2 = \Psi'(u_0) = -2 - r_0 \frac{F'(r_0)}{F(r_0)} \to 3 - \alpha^2 = -r_0 \frac{F'(r_0)}{F(r_0)}$ $\forall r_0$ i integrant trobem

$$F(r_0) = -\frac{k}{r_0^{3-\alpha^2}} \quad k > 0$$

Teorema 3.2 (Bertrand)**.** *Les úniques forces que totes les seves òrbites acotades són tancades són $F(r) = -kr$ i $F(r) = -\frac{k}{r^2}$, és a dir, $\alpha = \{1, 2\}$.* *(Proof: apèndix A)*

Estabilitat de les òrbites circulars Només es podran produir òrbites circulars quan $r = ct.$, és a dir, no depengui del temps. Això implica que $\dot{r} = 0$ i $\ddot{r} = 0$ què, aplicant la segona llei de Newton es torna en la condició $U_e'(r_0) = 0$.

$$U_e'(r_0) = U'(r_0) - \frac{ml^2}{r_0^3} = 0 \to U'(r_0) = \frac{ml^2}{r_0^3} \tag{3.19}$$

En altres paraules, només és produirà una òrbita circular quan r_0 sigui un mínim de potencial $V''_{eff}(r_0) > 0$

$$U_e''(r_0) = U''(r_0) + 3\frac{ml^2}{r_0^4} > 0 \to r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0) > 0 \tag{3.20}$$

3.5 Moviment planetari

La força de la gravetat és una força centra lde la forma $F(r) = -kr^{-2}$, per tant segons el teorema 3.2 les orbites seran tancades. L'energia potencial és $U = -kr^{-1}$ i utilitzant (3.14) trobem que

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon\cos(\theta)} \tag{3.21}$$

$r(\theta)$ segueix l'equació d'una el·lipse amb $\alpha = L^2/mk$ sent l'anomenat *latus rectum* i $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{mk^2}E}$ la excentricitat. Podem distingir tres casos:

$\epsilon = 0$: $r(\theta) = \alpha$ equació d'una circumferència.

$\epsilon > 1$: $\Rightarrow E > 0$ la trajectòria correspondrà a una hipèrbole.

$\epsilon < 1$: $\Rightarrow E < 0$ la trajectòria correspondrà a una el·lipse amb el radi de l'orbita oscil·lant entre r_{min} i r_{max} corresponents a $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ respectivament. La distancia màxima (apogeu) i mínima (perigeu) al centre de forces és $a = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$ i $b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$ respectivament.

Podem considerar, per aquest cas $U = -kr^{-1}$, els casos en que es produiran òrbites circulars, a partir de les relació (3.19) obtenim $r_0 = \frac{ml^2}{k}$ i a partir de (3.20) $\frac{ml^2}{r_0^4} = \frac{k}{r_0^3} > 0 \Rightarrow U'(r_0) > 0 \Leftrightarrow -F(r_0) > 0$. Tornem a obtenir que necessàriament $F(r_0) < 0$ per a produir-se una òrbita circular.

Utilitzant el potencial efectiu podem calcular quina serà la freqüència de petites oscil·lacions prop de l'equilibri. Procedim com abans, definim $r = r_0 + \xi$ i expandim en serie el potencial fins a segon ordre $U_e(r) = U_e(r_0) + U_e'(r_0)\xi + \frac{1}{2}U_e''(r_0)\xi^2$, com que ens trobem en un mínim $U_e'(r_0) = 0$ i fent un canvi de variable $r' = r - r_0$ obtenim que el potencial efectiu és aproximadament

$$U_e(r) \approx \frac{1}{2}\frac{d^2U_e}{dr^2}\Big|_{r=r_0}\xi^2 = \frac{1}{2}K\xi^2$$

Imposant la 2ª llei de Newton per aquest potencial trobem

$$m\ddot{r} = m\ddot{\xi} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}K\xi^2\right) = -K\xi^2 \Rightarrow \ddot{\xi} + \frac{K}{m}\xi = 0$$

La freqüència d'aquestes oscil·lacions serà $\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{1}{m}\frac{d^2U_e}{dr^2}\Big|_{r=r_0} = \frac{k}{mr_0^3}$, que és igual a la freqüència de revolució calculada a partir de (3.16).

4 Oscil·lacions acoblades

4.1 Oscil·lacions prop de l'equilibri

Considerem un sistema de partícules (conservatiu) $\{\boldsymbol{x}_\alpha\} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\}$ lligades entre elles per lligams descrits amb un conjunt de coordenades generalitzades q_k $k = 1, \dots, n$ i el temps t, on n és el grau de llibertat del sistema, així la posició de les partícules al llarg del temps ve donada per $\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha(q_j)$. Especifiquem que aquest sistema es troba en equilibri estable per a $q_k = q_k^0$, en aquest estat $\dot{q}_k = 0$ i $\ddot{q}_k = 0$.[*]

L'energia potencial del sistema, desenvolupant al voltant de la posició d'equilibri és

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(q_1^0, \dots, q_n^0) + \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}\right|_0 q_i q_j + \cdots$$

el segon terme es cancel·la ja que estem en un mínim i sense pèrdua de generalitat podem escollir l'origen de potencial U de tal manera que $U(q_1^0, \dots, q_n^0) = 0$. L'únic terme que sobreviu és el quadràtic ja que negligim els termes d'ordre superior, així

$$U(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} q_i q_j \tag{4.1}$$

on definim $A_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}\right|_0$ amb A_{ij} una matriu de constants simètrica i definida positiva.

D'altra banda, l'energia cinètica és

$$K = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \right]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

on definim la matriu $m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = \sum_\alpha m_\alpha \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q_j} \right)$ en aquest cas no és una matriu de constants però fent una expansió en serie al voltant de q_k^0 obtenim

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_l \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l} q_l + \cdots$$

en aquest cas ens hem de quedar només amb el terme constant $m_{ij}\big|_{q_k^0}$ ja que el següent ordre d'aproximació seria cubic $\dot{q}_i \dot{q}_j q_l$ però ens hem de quedar en el mateix ordre que U, per tant l'energia cinètica final és

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{4.2}$$

on $m_{ij} = m_{ij}(q_1^0, \dots, q_n^0)$ és una matriu de constants simètrica i definida positiva.

Un cop obtingudes l'energia cinètica i potencial podem calcular l'energia total del sistema

$$E = K + U = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + A_{ij} q_i q_j \right]$$

pel principi de conservació de l'energia aquesta ha de ser constant, el que implica $\dot{E} = 0$

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} (\ddot{q}_i \dot{q}_j + \dot{q}_i \ddot{q}_j) + A_{ij} (\dot{q}_i q_j + q_i \dot{q}_j) \right] = 0$$

i fent una mica de matemagia trobem

$$\sum_{i,j} \left[m_{ij} \ddot{q}_j + A_{ij} q_j \right] \dot{q}_i = 0$$

[*]Considerarem $q_k^0 = 0$ per a simplificar els càlculs, de manera general $q_k = q_k^0 + \tilde{q}_k$ on les $\tilde{q}_k$ corresponen a petites desviacions respecte la posició d'equilibri. Veiem que per $q_k^0 = 0$ llavors $q_k = \tilde{q}_k$ i per tant les podem fer servir indistintament.

com que les $\dot{q}_i$ són linealment independents llavors

$$\sum_j (m_{ij}\ddot{q}_j + A_{ij}q_j) = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

> Un mètode més ràpid de trobar aquesta relació és fent servir les equacions de Lagrange (8.11)
>
> $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$
>
> on $\mathcal{L}$ és la lagraniana definida com
>
> $$\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k) = K - U$$
>
> En aquest cas U només depèn de les coordenades generalitzades i K de les velocitats generalitzades per tant
>
> $$\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j A_{jk}q_j + \frac{d}{dt}\sum_j m_{jk}\dot{q}_j = 0$$
>
> De tal manera que les equacions de moviment esdevenen
>
> $$\sum_j (m_{ij}\ddot{q}_j + A_{ij}q_j) = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

Hem obtingut un sistema de n equacions diferencials de segon ordre amb coeficients constants, per trobar la solució escriurem $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)^t \to \ddot{\boldsymbol{q}} = (\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n)$, $\hat{m} = [m_{ij}]$ i $\hat{A} = [A_{ij}]$ així podem escriure l'equació en forma matricial

$$\hat{m}\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{A}\boldsymbol{q} = 0 \tag{4.4}$$

multipliquem per $\hat{m}^{-1/2}$ i definim $\boldsymbol{y} = \hat{m}^{1/2}\boldsymbol{q}$

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \hat{m}^{-1/2}\hat{A}\hat{m}^{-1/2}\boldsymbol{y} = \ddot{\boldsymbol{y}} + \hat{M}\boldsymbol{y} = 0$$

on la nova matriu $\hat{M} = \hat{m}^{-1/2}\hat{A}\hat{m}^{-1/2}$ és també simètrica i per tant diagonalitza en els reals, això ens diu que podem trobar solucions del tipus $\hat{M}\boldsymbol{u}_i = \omega_i^2\boldsymbol{u}_i$ sent $\boldsymbol{u}_i$ el vector propi corresponent al valor propi o **freqüència característica** ω_i^2. Aquests $\boldsymbol{u}_i$ estan relacionats amb $\boldsymbol{y}$ i per tant amb $\boldsymbol{q}$ per

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_i \eta_i(t)\boldsymbol{u}_i \longleftrightarrow \boldsymbol{q}(t) = \sum_i \eta_i(t)(\hat{m}^{-1/2}\boldsymbol{u}_i) \tag{4.5}$$

Les $\eta_i(t)$ s'anomenen modes normals d'oscil·lació i són, per definició, quantitats desacoblades que experimenten oscil·lacions a només una freqüència. Aquests modes satisfan l'equació

$$\sum_i \ddot{\eta}_i\boldsymbol{u}_i + \sum_i \eta_i\hat{M}\boldsymbol{u}_i = \sum_i \left[\ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i\right]\boldsymbol{u}_i = 0 \Rightarrow \ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = 0$$

és a dir, són oscil·ladors harmònics simples que tenen per solució

$$\eta_i(t) = A_i\cos(\omega_i t + \delta_i) \tag{4.6}$$

> Notem que els vectors propis $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ són ortonormals si $i \neq j$, per tant, una altra manera de calcular els modes normals d'oscil·lació és fent servir l'expressió (4.5), juntament amb el fet que $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle = \delta_{ij}$, ens porta a que
>
> $$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_i \eta_i(t)\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_i\rangle = \eta_k(t)$$

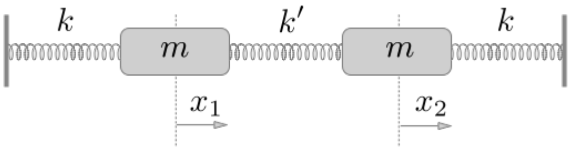
En resum, la solució del problema d'oscil·lacions acoblades per als lligams q_k és

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \delta_i)(\hat{m}^{-1/2}\boldsymbol{u}_i) \tag{4.7}$$

L'energia total del sistema la podem escriure a partir de les relacions (4.1) i (4.2) com

$$E = K + U = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\dot{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\hat{M}\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\sum_j A_j^2\omega_j^2 = ct. \tag{4.8}$$

Exemple Donat un sistema com el de la figura 4.1, desplacem les masses de la posició d'equilibri en x_1 i x_2 respectivament, les equacions del moviment seran



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_1 - x_2) \end{cases}$$

reescrivim el sistema per a deixar-lo com el de l'eq. (4.4)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}x_1 - \frac{k'}{m}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}x_2 - \frac{k'}{m}x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} + \hat{A}\boldsymbol{x} = 0$$

on identifiquem

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{A} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{pmatrix}$$

veiem que ja està de la forma que ens interessa, el següent pas és diagonalitzar $\hat{A}$

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m} - \omega^2 & -k' \\ -k' & \frac{k+k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)^2 - k' = \omega^4 - \frac{k+k'}{m}\omega^2 + \left(\frac{k+k'}{m}\right)^2 - k' = 0$$

que té per solucions

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

i tenen per vectors propis

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Només ens queda trobar els modes normals de vibració que seran

$$\eta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad ; \quad \eta_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

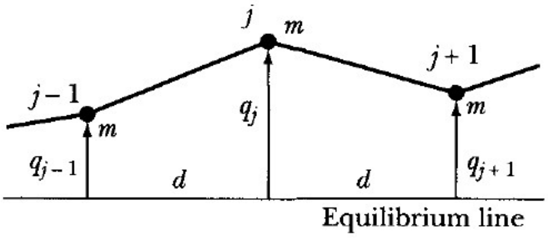
per tant el moviment del sistema vindrà determinat per

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

L'efecte d'acoblar oscil·ladors és separar la freqüència natural d'oscil·lació ω_0 amb unes més grans i d'altres més petites. En general, per a un sistema de n oscil·ladors hi haurà $n/2$ freqüències $< \omega_0$ i $n/2$ freqüencies $> \omega_0$ (si n és imparell llavors existirà una freqüencia característica igual a ω_0).

4.2 *The Loaded String*

Considerem el cas d'una corda en la que s'han disposat n partícules idèntiques de massa m disposades a intervals regulars de longitud d, d'aquesta manera la longitud de la corda serà $L = (n+1)d$. Aproximarem al cas de petites oscil·lacions transversals respecte la posició d'equilibri, així la tensió T de la corda la podem considerar contant.



L'equació de moviment de la partícula q_j és respecte les seves veïnes:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}_j &= T\sin(\theta_j) - T\sin(\theta_{j-1}) \\
\ddot{q}_j &\approx \frac{T}{m}\left[\tan(\theta_j) - T\tan(\theta_{j-1})\right]
\end{aligned}
$$

A partir de la figura veiem que $\tan(\theta_j) = (q_{j+1} - q_j)/d$ per tant l'equació del moviment per a la partícula j és

$$\ddot{q}_j = \frac{T}{md}\left[q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right]$$

i en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \frac{T}{md}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{T}{md}\hat{W}\boldsymbol{q} = 0 \tag{4.9}$$

Per a solucionar l'equació anterior expressarem $\hat{W} = \hat{\Omega} + 2\mathbb{I}_n$ on la nova matriu $\hat{\Omega}$ és tridiagonal amb 0's a la diagonal principal i -1 a les secundaries. El polinomi característic d'aquest tipus de matrius és

$$P_n(\lambda) = (d_n - \lambda)P_{n-1}(\lambda) - c_{n-1}^2 P_{n-2}(\lambda) \tag{4.10}$$

Aquests polinomis pel *teorema de Favard* formen una família de polinomis ortogonals $\{P_n(\lambda)\}$.

En el nostre cas concret les $d_n = 0$ i $c_n = -1$, amb les condicions inicials de recurrència $P_{-1}(\lambda) = 0$ i $P_0(\lambda) = 0$ trobem

$$P_{n+1}(\lambda) = -\lambda P_n(\lambda) - P_{n-1}(\lambda) \tag{4.11}$$

fent el canvi $\lambda = -2x$ i $u_n(x) = P_n(-2x)$ amb $u_0(x) = 1$ i $u_1(x) = 2x$ trobem una nova formula de recurrència

$$u_{n+1}(x) = 2xu_n(x) - u_{n-1}(x)$$

que és la relació de recurrència dels polinomis de Chebyshov i fent un altre canvi $x = \cos(\theta)$ la solució es pot expressar en funció d'aquest angle θ com

$$u_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin[(n-1)\theta]}{\sin(\theta)} \tag{4.12}$$

Estem buscant els valors propis de la matriu $\hat{\Omega}$ per tant volem trobar les arrels de $P_n(\lambda)$ o, el que és el mateix, les arrels de $u_n(\cos(\theta))$:

$$u_n(\cos(\theta)) = 0 \Rightarrow (n+1)\theta_j = j\pi \longrightarrow \theta_j = j\frac{\pi}{n+1}$$

Desfent tots els canvis fets anteriorment i tenint en compte que les freqüències característiques són $\omega_j^2 = \frac{T}{md}[\lambda_j + 2]$ obtenim

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{T}{md}}\sin\left(j\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \tag{4.13}$$

Els vectors propis venen donats per

$$\boldsymbol{v}_r^{(j)} = u_r(\cos(\theta_j)) = \sin\left(r\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

que si ortonormalitzem ($\left\|\boldsymbol{v}^{(j)}\right\| = 1$)

$$\boldsymbol{v}_r^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(r\frac{j\pi}{n+1}\right) \tag{4.14}$$

Finalment només queda ajuntar tots els resultats per trobar $q_r(t)$ tenint en compte (4.6) i (4.7) per obtenir

$$q_r(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_j A_j \sin\left(r\frac{j\pi}{n+1}\right)\cos\left[2\sqrt{\frac{T}{md}}\sin\left(j\frac{\pi}{2(n+1)}\right)t + \delta_r\right] \tag{4.15}$$

4.3 Energia

L'energia total del sistema és $E = K + U$ on l'energia cinètica és la suma de l'energia cinètica de cada una de les partícules, és a dir,

$$K = \sum_i^n \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 = \frac{1}{2}m\left\|\dot{\boldsymbol{q}}\right\|^2 \tag{4.16}$$

D'altra banda, l'energia potencial la podem calcular a partir de la força entre una partícula i la seva consecutiva tenint en compte que $\partial_{q_r}U_{r,r+1} = -F_{r+1\to r}$

$$U = -\int \frac{T}{d}(q_{r+1} - q_r)dq_r = \frac{T}{2d}(q_{r+1} - q_r)^2 = \frac{T}{2d}\boldsymbol{q}\hat{W}\boldsymbol{q} \tag{4.17}$$

Podem arreglar aquestes dues últimes equacions substituint $\boldsymbol{q}$ pel seu valor donat per l'expressió (4.5)

$$K = \frac{m}{2}\langle\sum_i \dot{\eta}_i\boldsymbol{v}^{(i)}, \sum_j \dot{\eta}_j\boldsymbol{v}^{(j)}\rangle = \frac{m}{2}\sum_{i,j}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j\langle\boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)}\rangle = \frac{m}{2}\sum_i \dot{\eta}_i^2 = \frac{m}{2}\sum_i A_i^2\omega_i^2\sin^2(\omega_i t + \delta_i)$$

$$U = \frac{m}{2}\boldsymbol{q}\left(\frac{T}{md}\hat{W}\boldsymbol{q}\right) = \frac{m}{2}\left(\sum_i \eta_i\boldsymbol{v}^{(i)}\right)\left(\sum_j \eta_j\omega_j^2\boldsymbol{v}^{(j)}\right) = \frac{m}{2}\sum_i \omega_i^2\eta_i^2 = \frac{m}{2}\sum_i A_i^2\omega_i^2\cos^2(\omega_i t + \delta_i)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\sum_i^n A_i^2\omega_i^2\left\{\sin^2(\omega_i t + \delta_i) + \cos^2(\omega_i t + \delta_i)\right\} = \frac{1}{2}m\sum_i^n A_i^2\omega_i^2 \quad (= ct.) \tag{4.18}$$

Per tant, l'energia mecànica de la corda és constant i veiem que és la suma de cada mode d'oscil·lació desacoblat.

4.4 Continuanització de la corda discreta

Considerarem el cas de la corda discreta en que fem tendir el nombre d'oscil·ladors a infinit i, per tant, la distancia entre cadascun d'ells a 0:

$$\begin{cases} n \to \infty, \ d \to 0 & \longrightarrow (n+1)d = L \\ m \to 0, \ d \to 0 & \longrightarrow \frac{m}{d} = \rho \end{cases} \tag{4.19}$$

Fem el canvi $x = rd = r\dfrac{L}{n+1}$ així reescriurem els vectors propis donats a l'eq. (4.14) com

$$\boldsymbol{u}_r^{(j)} = \frac{\boldsymbol{v}_r^{(j)}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n+1}{L}}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(j\frac{x\pi}{L}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(j\frac{x\pi}{L}\right) \equiv u^{(j)}(x) \tag{4.20}$$

Aquestes funcions $u^{(j)}(x)$ son ortonormals respecte el producte escalar definit per $\langle f, g\rangle = \int_0^L f \cdot g dx$ ja que

$$\delta_{ij} = \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = \sum_r \frac{\boldsymbol{v}^{(i)}}{\sqrt{d}}\frac{\boldsymbol{v}^{(j)}}{\sqrt{d}} d = \int_0^L u^{(i)}(x) \cdot u^{(j)}(x) dx$$

Amb les freqüències característiques podem expressar $\dfrac{1}{\sqrt{md}} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\dfrac{n}{L}$ i aproximar el $\sin\theta_j \sim \theta_j$ per obtenir*

$$\omega_j = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{2n}{L}\sin\left(j\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \sim \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{2n}{L}\frac{j\pi}{2(n+1)}\frac{L}{L} = \frac{j\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{4.21}$$

Per últim, definirem $\tilde{\eta}_j = \sqrt{d}\eta_j$ com el nou mode normal de vibració i farem el canvi $q_r \leftrightarrow q(x)$, d'aquesta manera

$$\tilde{\eta}_j(t) = \sum_r \sqrt{d} \cdot q_r \sqrt{d} \cdot \boldsymbol{u}_r^{(j)} = \int_0^L q(x) \cdot u^{(j)}(x) dx \tag{4.22}$$

Ja tenim tot el que necessitem per trobar la solució final que és

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\eta}_j(t) u^{(j)}(x) \tag{4.23}$$

*Aquesta aproximació no és del tot bona si considerem $j \in [1, \infty)$ el que provoca que en el limit superior $j \sim n+1$, tot i això pràcticament mai podrem excitar l'oscil·lador en el mode $j \to \infty$ ja que requeriria una energia infinita, per tant l'aproximació serà valida per a valors de $j \ll n$.

5 Moviment relatiu

Translació Segons la figura 1 la posició de la partícula ve donada per $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}$ per tant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_M$, és a dir, la força sobre aquesta partícula respecte el sistema de referencia no inercial és

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_F = m(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_M) \Rightarrow m\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 \tag{5.1}$$

on $\boldsymbol{F}$ són les forces a les que està sotmesa la partícula respecte el SR inercial Σ'.

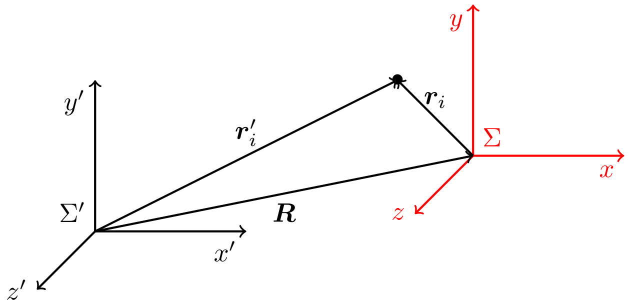


Figura 1: Posició d'una partícula i respecte un SR inercial Σ' ($\boldsymbol{a} = 0$) i un SR no inercial Σ.

Rotació Segons la figura 2 el vector $\boldsymbol{r}$ es pot expressar respecte els dos SR com

$$\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

Si calculem la derivada d'aquest vector respecte Σ' obtenim

$$\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d'}{dt}\left[r_x\boldsymbol{e}_x + r_y\boldsymbol{e}_y + r_z\boldsymbol{e}_z\right] = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + r_x\frac{d'\boldsymbol{e}_x}{dt} + r_y\frac{d'\boldsymbol{e}_y}{dt} + r_z\frac{d'\boldsymbol{e}_z}{dt}$$

Les derivades dels vectors de la base les podem expressar com $\frac{d'\boldsymbol{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{e}_j$ i tenint en compte que $\frac{d'\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i = 0$, $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i = 1$ i $\frac{d'\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_j = -\frac{d'\boldsymbol{e}_j}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i$ obtenim

$$\begin{pmatrix} d'\boldsymbol{e}_x \\ d'\boldsymbol{e}_y \\ d'\boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Definint el vector $\boldsymbol{\omega} = (a_{23}, a_{31}, a_{12})$ podem expressar la derivada d'un vector en un SR no inercial respecte un SR inercial com*

$$\frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times \tag{5.3}$$

que per al cas de $\boldsymbol{r}$ obtenim l'equació de transformació de velocitats

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.4}$$

cal notar que l'acceleració angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ no depèn del SR escollit. Tornant a derivar aquesta expressió respecte el temps obtenim

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_M + \overbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}}^{\text{Acc. coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}_{\text{Acc. centrípeta}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} \tag{5.5}$$

Multiplicant per la massa podem trobar la força exercida sobre la particula en el SR no incercial

$$m\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} \tag{5.6}$$

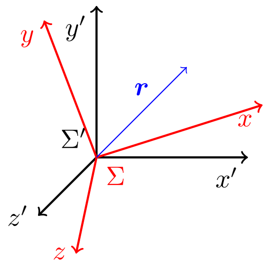


Figura 2: Posició d'un vector $\boldsymbol{r}$ respecte un SR inercial Σ' ($\boldsymbol{a} = 0$) i un SR no inercial Σ en rotació.

Per a un sistema en translació i rotació només hem d'ajuntar els resultats obtinguts anteriorment:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r} \tag{5.7}$$
$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5.8}$$
$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}_M + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \tag{5.9}$$

La força efectiva respecte el SR no inercial serà

$$\boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \tag{5.10}$$

5.1 Sistema Terra

Considerem el cas d'un cos sobre la superfícies de la Terra, aquest podem considerar que és un sistema de referencia inercial, al qual podem aplicar l'expressió (5.10) als problemes de moviment sobre la superfície terrestre. La superfície de la Terra presenta una velocitat angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_z$ que podem considerar constant ($\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$) i, per simplicitat, descomposarem la força en $\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{S} + m\boldsymbol{g}_0$ on $\boldsymbol{S}$ és qualsevol altre força diferent de la gravetat i $\boldsymbol{g}_0$ és l'accel·leració de la gravetat a la superfície terrestre:

$$\boldsymbol{g}_0 = -G\frac{M_T}{R_T^2}\boldsymbol{e}_z = -g_0\boldsymbol{e}_z \approx -9.81\boldsymbol{e}_z$$

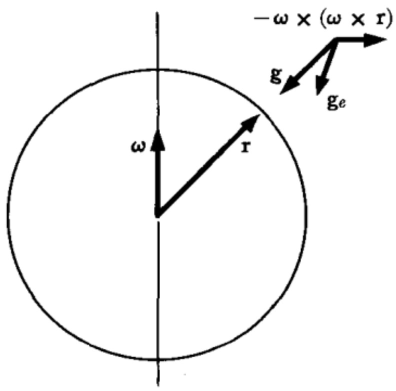


Figura 3: Accel·leració efectiva de la gravetat en el sistema Terra en rotació.

Considerem un cos, sotmès només a la força de la gravetat $\Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$, que cau des d'una altura h respecte el SR de la superfície, la posició d'aquesta partícula vindrà donada per $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}$ on $|\boldsymbol{R}| = R_T$, tenint en compte que $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$ i $\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$, obtenim la 2ª llei de Newton en el SR terra queda com

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})] - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

*Aquesta expressió es valida sempre que tinguem un SR rotant respecte un altre, en el cas concret que invertim el SR propi llavors $\omega \leftrightarrow -\omega$ i es seguirà complit la igualtat.

Podem definir $\boldsymbol{g}_e(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ com l'acceleració gravitatòria efectiva*, que per al cas $r \ll R_T$ és aproximadament igual a $\boldsymbol{g}^* \equiv \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$, substituint a l'equació anterior†

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g}^* - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

Veiem a continuació que són cada un dels termes:

- $\boldsymbol{g}^*$: abans de tot hem d'expressar $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_z$ respecte el SR no inercial, si λ és l'angle respecte el pla $x'y'$ (és a dir, la latitud de la Terra) la velocitat angular vindrà donada per $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\lambda, 0, \sin\lambda)$. D'altra banda sabem que $\boldsymbol{R} = R_T \boldsymbol{e}_z$, així el triple producte vectorial $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) = -\omega^2 R_T(\sin\lambda\cos\lambda, 0, \cos^2\lambda)$i per tant el primer terme vindrà donat per

$$\boldsymbol{g}^* = (\omega^2 R_T \sin\lambda\cos\lambda, 0, \omega^2 R_T \cos^2\lambda - g_0)$$

- $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$: considerem que $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ per tant $\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ així el producte vectorial, tenint en compte l'anterior per $\boldsymbol{\omega}$, és

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \omega(-\dot{y}\sin\lambda, \dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda, -\dot{y}\cos\lambda)$$

Substituint ambdós dos resultats anteriors a l'equació de moviment i simplificant les masses obtenim

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \omega^2 R_T \sin\lambda\cos\lambda + 2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{z}\cos\lambda - 2\omega\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} &= \omega^2 R_T \cos^2\lambda - g_0 + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \tag{5.11}$$

Que resolent aquest sistema d'equacions diferencials, amb les condicions $\boldsymbol{r} = (0, 0, h)$ i $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$, obtenim

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2}[\omega^2 R_T \sin\lambda\cos\lambda]t^2 \approx 0 \\ y(t) &= -\frac{1}{3}\omega[\omega^2 R_T \cos^2\lambda - g_0]\cos\lambda t^3 \approx \frac{1}{3}\omega g_0 \cos\lambda t^3 \\ z(t) &= h + \frac{1}{2}[\omega^2 R_T \cos^2\lambda - g_0]t^2 \approx h - \frac{1}{2}g_0 t^2 \end{cases} \tag{5.12}$$

on hem fet la simplificació $\omega^2 R_T = 5.31 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 6378 \times 10^3\,\mathrm{m} = 0.034\,\mathrm{ms}^{-2} \approx 0$.

Per tant, la desviació en la direcció longitudinal d'un cos que cau des d'un altura h amb velocitat inicial 0 és

$$y(h) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{8h^3}{g_0}} \tag{5.13}$$

5.2 Pèndol de Foucault

Girava la terra, però aquell lloc on el fil estava ancorat era l'únic punt fix de l'univers.

Umberto Eco, *El pèndol de Foucault*, Capítol 1

Suposem una massa m penjant d'un fil molt llarg de longitud l, sotmès a una tensió $\boldsymbol{T}$, sobre la superfície de la Terra a una latitud λ, si separem inicialment el pèndol de la posició d'equilibri $\theta \to 0$ aquest començara a oscil·lar, al cap d'unes hores, amb un moviment de precessió al voltant de l'eix vertical degut a la rotació de la Terra.

Per a resoldre l'equació de moviment del pèndol suposarem 3 sistemes de referencia (figura 4): el sistema de referencia inercial Terra Σ' que rota al voltant del l'eix z' amb una velocitat angular ω constant; el sistema de referencia no inercial Σ sobre la superfície de la terra i el sistema de referencia no inercial Σ^*, solidari al pèndol, que rota amb una velocitat angular Ω constant al voltant de l'eix $z^* = z$.

*Aquest terme afegit degut a l'efecte Coriolis provoca que la força apunti, en latituds nord, lleugerament més al sud que el centre de la Terra (fig. 3). Qualsevol objecte que es llenci prop de la superfície caurà en la direcció de $\boldsymbol{g}_e$ i un liquid arribarà a l'equilibri quan la seva superfície sigui perpendicular a $\boldsymbol{g}_e$, aquest és el motiu pel qual la Terra te la forma d'un el·lipsoide aixafat pla als pols, amb un grau d'aixafament tal que a cada punt faci la superfície terrestre perpendicular a $\boldsymbol{g}_e$.

†En aquest pas el PP es va tornar boig, que si primes no primes, definint infinites $\boldsymbol{g}$'s: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}'), \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{r}'), \boldsymbol{g}_e(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{r})$ però amb aquestes dos últimes ja tenim més que suficient.

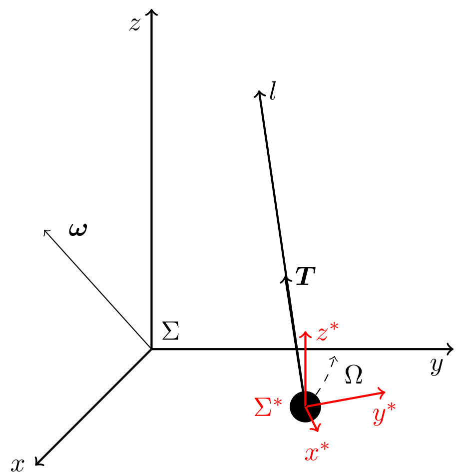


Figura 4: Representació esquemàtica del pèndol de Foucault on el sistema Σ es troba sobre la superfície de la Terra i el sistema Σ^* rota respecte aquest amb una velocitat angular $\boldsymbol{\Omega}$.

Degut a que la longitud de la corda és molt gran i l'amplitud és molt petita, podem considerar les desviacions respecte l'eix z negligibles, per tant tindrem un moviment en 2 dimensions sobre el pla xy. També podem considerar la força de la gravetat constant amb intensitat $\boldsymbol{g}_0 = -g_0\boldsymbol{e}_z$. A més, menysprearem els efectes degut a l'acceleració de coriol·lis per la Terra.

Així, tenint en compte totes aquestes consideracions obtenim l'equació de moviment:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

On d/dt identifica la derivada respecte el SR Σ, però nosaltres volem estudiar el moviment respecte Σ^*, per tant, tal com hem vist anteriorment, la derivada temporal entre aquests dos sistemes està relacionada per (5.3):

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

Substituint a l'equació de moviment i aillant el terme corresponent a l'acceleració en Σ^* obtenim

$$m\frac{d^{*2}\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_0 - 2m(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt} - m\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt} - 2m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

Utilitzant $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ i que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{e}_z$ reescrivim l'equació anterior

$$m\frac{d^{*2}\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_0 + m[\Omega^2 + 2\Omega(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}_z)]\boldsymbol{r} - m[\Omega^2(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{r}) + 2\Omega(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})]\boldsymbol{e}_z - 2m(\boldsymbol{\omega} + \Omega\boldsymbol{e}_z) \times \frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt}$$

Si analitzem el moviment del pèndol, veiem que no pot haver cap força amb component $\boldsymbol{e}_y^*$ ja que això faria girar el pèndol i no es produiria la precessió*, això implica que tots els termes anteriors han de viure al pla x^*z. Això és cert per tots excepte per l'ultim terme en general, per petites oscil·lacions $d^*\boldsymbol{r}/dt$ serà pràcticament horitzontal així podem fer que l'últim terme visqui al pla vertical fent que $\boldsymbol{\omega} + \Omega\boldsymbol{e}_z$ sigui completament horitzontal:

$$(\boldsymbol{\omega} + \Omega\boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{e}_z = 0 \Longrightarrow \Omega = -\omega\cos\theta$$

On θ és l'angle entre la vertical i l'eix de la Terra, és a dir, $\theta = \pi/2 - \lambda$

$$\Omega(\lambda) = \omega \sin\lambda \tag{5.14}$$

Hem trobat la relació entre la velocitat angular del pèndol en funció de la latitud on estigui situat sense necessitat de solucionar l'equació de moviment.

*En cert sentit, el que succeeix es que la Terra es mou sota el pèndol el qual no varia la seva direcció pròpia d'oscil·lació x^* (veure animació).

6 Solid rígid

Un solid rigid és aquell en que la distancia entre tots els punts $\boldsymbol{r}_i$ que formen el cos és constant en el temps $\Rightarrow |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = ct.\ \forall i,j$ (independentment del SR).

Centre de masses La posició del centre de masses del cos vé donada per

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M_T}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \tag{6.1}$$

o per al cas d'un sistema continu $\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} dm$.

La posició d'una partícula respecte un sistema de referencia inercial Σ' vindrà donada respecte el SR centre de masses Σ per $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}$ i per tant la seva velocitat serà $\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i$, a partir d'aquesta relació podem calcular l'energia cinètica i el moment angular del cos:

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2 \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P} + \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{L}_{CM} + \boldsymbol{L} \tag{6.3}$$

Tenint en compte que $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$ podem expressar l'energia cinètica en termes de $\boldsymbol{\omega}$ com

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)^2 = T_{CM} + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \sum_{i,j=1}^{3}[\delta_{ij}\boldsymbol{r}_\alpha^2 - r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}]\omega_i\omega_j \tag{6.4}$$

Per al calcul del segon terme hem fet servir que $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)_i = \epsilon_{ijk}\omega_j r_{\alpha,k}$ i per tant $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)^2 = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}\omega_j\omega_m r_{\alpha,k}r_{\alpha,n}$, apliquem ara la identitat

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{6.5}$$

Identitat que haurem de recordar d'ara en endavant si volem sobreviure amb el PPR. Llavors només ens queda multiplicar les deltes per el valor corresponent i trobarem el resultat de l'eq. (6.4).

Veiem que l'energia cinètica consta de dos termes: el primer, te en compte la translació del cos respecte el sistema de referencia inercial i el segon, descriu la rotació del cos respecte el sistema CM. Aquest últim es pot expressar com

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\hat{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} \tag{6.6}$$

on I_{ij} són les component del **tensor d'inèrcia** $\hat{I}$ donades per

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\boldsymbol{r}_\alpha^2 - r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}] \longleftrightarrow I_{ij} = \int_V [\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2 - r_i r_j]dm \tag{6.7}$$

que conformen una matriu real simètrica i definida positiva.

- Si $I_{ij} = I\delta_{ij} \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}I\sum \delta_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}I\omega^2$.
- Si $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}_\alpha \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\left(\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^2\right)\omega^2$.

També podem expressar el moment angular en termes del tensor d'inèrcia tenint en compte com abans que $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$:

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha m_\alpha[\boldsymbol{r}_\alpha \times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}_\alpha^2 - \boldsymbol{r}_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{\omega})] = I_i^j\omega_j\boldsymbol{e}_i = \hat{I}\boldsymbol{\omega} \tag{6.8}$$

Eixos principals d'inèrcia Donat que $\hat{I}$ és una matriu simètrica real aquesta diagonalitza en els real amb $I_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}$ valors propis i $\boldsymbol{e}_{i=1,2,3}$ vectors propis ortogonals ($\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$). Així, podem expressar l'energia cinètica de rotació i el moment angular del cos respecte els nous eixos per obtenir

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \omega_i^2 \qquad ; \qquad \boldsymbol{L} = I^i \omega^i \boldsymbol{e}_i$$

- Si $I_1 = I_2 = I_3$ és el cas d'una esfera.
- Si $I_1 = I_2 \neq I_3$ és el cas d'un cilindre.
- Si $I_1 \neq 0$ i $I_2 = I_3 = 0$ és el cas d'un rotor.

En el cas que hi hagi un moment d'inercia degenerat llavors es compleix que $I_{\substack{eix\\principal}} \leq \sum_{\substack{altres\\eixos}} I$.

Teorema de Steiner Sigui $\boldsymbol{r}_\alpha$ la posició de la partícula α respecte el CM Σ, $\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha$ la posició d'aquesta respecte un SR $\tilde{\Sigma}$ separat del primer per $\boldsymbol{d}$ (vector que uneix els dos orígens de coordenades) llavors el tensor d'inèrcia respecte Σ' serà

$$I_{ij} = I_{ij}^{CM} + \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\boldsymbol{d}^2 - d_i d_j] \tag{6.9}$$

Demostració. Clarament, $\boldsymbol{r}'_\alpha = \tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha + \boldsymbol{d}$ llavors a partir de la definició de I_{ij} (6.7) tenim

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha^2 - \tilde{r}_{\alpha,i}\tilde{r}_{\alpha,j}] = \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}(\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{d})^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d})_{\alpha,i}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d})_{\alpha,j}] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha\left[\delta_{ij}(\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{d}^2 + 2\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{d}) - (r_{\alpha,i}r_{\alpha,j} + d_i r_{\alpha,j} + d_j r_{\alpha_i} + d_i d_j)\right] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2 - r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}] + \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\boldsymbol{d}^2 - d_i d_j] + \sum_\alpha m_\alpha\left[2\delta_{ij}\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{d} - d_i r_{\alpha,j} - d_j r_{\alpha_i}\right] \\
&= I_{ij}^{CM} + \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\boldsymbol{d}^2 - d_i d_j] + 2\delta_{ij}\left(\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\right)\cdot\boldsymbol{d} - d_i\left(\sum_\alpha m_\alpha\boldsymbol{r}_\alpha\right)_j - d_j\left(\sum_\alpha m_\alpha\boldsymbol{r}_\alpha\right)_i
\end{aligned}$$

els dos primers termes ja són els que volíem obtenir. Els restant podem veure que són identicament 0 ja que els sumatoris són respectivament $\boldsymbol{R}_{CM}^{CM}$, $R_{CM,i}^{CM}$ i $R_{CM,j}^{CM}$, és a dir, la posició del centre de masses respecte el sistema de referencia CM. □

Teorema eixos perpendiculars El moment d'inercia sobre un eix perpendicular al pla és la suma dels moments d'inercia sobre els dos eixos perpendiculars que formen aquest pla, és a dir, $I_z = I_x + I_y$.

6.1 Equacions d'Euler

Un cop calculat el moment angular d'un solid rígid (eq. (6.8)) podem derivar respecte el temps aquesta expressió per trobar el moment de forces que fa girar el cos, així fent servir (5.3) obtenim

$$\boldsymbol{N} = \frac{d'\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}$$

si fem coincidir els eixos de rotació del cos amb els seus eixos principals llavors podrem escriure que $L_i = I_i\omega_i$ el que ens porta a les equacions d'Euler:

$$\begin{cases} N_1 = I_1\dot{\omega_1} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ N_2 = I_2\dot{\omega_2} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ N_3 = I_3\dot{\omega_3} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{6.10}$$

que de forma general es poden escriure com

$$N_i = I_i\dot{\omega_i} + \epsilon_{ijk}\omega_j I_k \omega_k \tag{6.11}$$

Angles d'Euler Un canvi de coordenades es pot escriure en forma matricial com $\boldsymbol{x} = \hat{R}\boldsymbol{x}'$ on $\hat{R}$ s'anomena matriu de rotació i depèn de tres angles independent, en aquest cas dependrà dels angles d'Euler: φ, θ, ψ. La matriu final vindrà donada per la multiplicació de les matrius de cada una de les rotacions $\hat{R} = \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\varphi$:

$$\hat{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \hat{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

Totes les matrius, inclús $\hat{R}$, són ortogonals, és a dir, $\hat{O}\hat{O}^t = \mathbb{I}_3$.

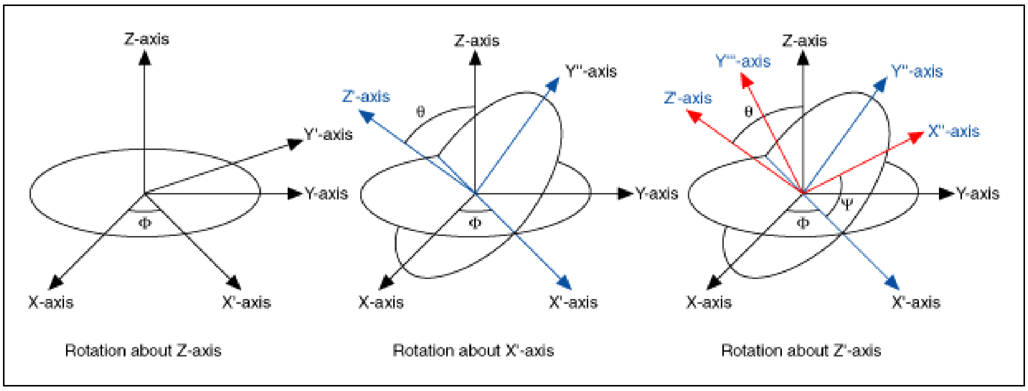


Figura 5: Representació dels angles d'Euler.

Podem associar un vector a cada una d'aquestes rotacions infinitesimals $\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}$ que tenen les direccions de l'eix z, l'eix x' i l'eix z' respectivament. És més utils expressar aquestes quantitats en el sistema de referencia del cos, així

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} & = \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} & = \dot{\theta}(\cos\psi, -\sin\psi, 0) \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} & = \dot{\psi}(0,0,1) \end{cases}$$

D'aquesta manera la velocitat angular del cos serà igual a la suma de cada una de les velocitats angulars de rotació respecte aquests tres angles:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Així podem relacionar una rotació en funció dels angles d'Euler amb les equacions d'Euler (6.10).

Equacions de moviment

Teorema 6.1 (Euler)**.** *El desplaçament general d'un solid rígid amb un punt fix és una rotació respecte un cert eix.*

Seguint l'enunciat del teorema anterior, una manera més general de trobar la velocitat angular en funció dels angles d'Euler és derivant les expressions de l'equació de moviment, a la secció 5 hem deduït les equacions per a un sistema en rotació a partir de com variaven els eixos de coordenades en rotació, ara ho farem fent us de la matriu de rotació $\hat{R}$ definida anteriorment. Així, de manera similar abans la posició de la partícula en el sistema fix en funció del mòbil vindrà donada per

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{b} + \hat{R}\boldsymbol{r} \longleftrightarrow \boldsymbol{r} = \hat{R}^t(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{b}) \tag{6.14}$$

Derivant respecte el temps la segona expressió obtenim

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \hat{R}^t(\dot{\boldsymbol{r}}' - \dot{\boldsymbol{b}}) + \dot{\hat{R}}^t(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{b}) = \hat{R}^t\dot{\boldsymbol{r}}' - \hat{R}^t\dot{\boldsymbol{b}} + \dot{\hat{R}}^t\hat{R}\boldsymbol{r} \tag{6.15}$$

Podem relacionar aquestes quantitats amb les trobades a (5.8) així veiem que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_M &= \dot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{v}_F &= \hat{R}^t\dot{\boldsymbol{r}}' \\ \boldsymbol{V} &= \hat{R}^t\dot{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} &= -\dot{\hat{R}}^t\hat{R}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

Per tant, la velocitat angular del SR ve donada en funció de la matriu de rotació, o viceversa, per

$$[\dot{\hat{R}}^t\hat{R}]^{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega^k \tag{6.16}$$

6.2 Moviment d'una baldufa simètrica

Podem considerar una baldufa simètrica com un solid rígid amb moments d'inèrcia $I_1 = I_2 = I \neq I_3$, així aplicant les equacions d'euler (6.10) amb $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ obtenim

$$\begin{cases} I\dot{\omega}_1 &= (I - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I)\omega_1\omega_3 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \end{cases}$$

La tercera equació ens diu que ω_3 és constant per tant podem definir $\Omega = \omega_3\dfrac{I_3 - I}{I} = ct.$ de manera que podem escriure les dues primeres equacions diferencial acoblades com

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0 \end{cases}$$

que tenen per solució

$$\begin{cases} \omega_1(t) = A\cos(\Omega t) \\ \omega_2(t) = A\sin(\Omega t) \end{cases}$$

Notem també que el modul d'$\boldsymbol{\omega}$ és constant doncs $|\omega| = \omega = \sqrt{A^2 + \omega_3^2}$.

Entenem aquest resultat com un moviment de precessió al voltant de l'eix z del cos amb una velocitat angular constant $\boldsymbol{\Omega}$. A més, donat que $\boldsymbol{N} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L} = ct.$ en el SR fix i l'energia cinètica també ho serà donat que el CM del cos no es mou, a partir de l'eq. (6.6) veiem que $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} = ct.$, és a dir, $\boldsymbol{\omega}$ precessiona al voltant de $\boldsymbol{L}$ amb un angle constant θ. Si fem coincidir l'eix z' del SR fix amb $\boldsymbol{L}$ podem descriure el moviment com el d'un con que roda sobre un altre de tal manera que $\boldsymbol{\omega}$ precessiona al voltant de z en el SR del cos i al voltant de z' en el SR inercial.

Moviment en un camp gravitatori Estudiem el cas d'una baldufa que gira amb un punt fix en la presencia d'un camp gravitatori d'intensitat $\boldsymbol{g}$, en aquest cas $\boldsymbol{N} = m\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{g}$ on $\boldsymbol{d}$ és vector que uneix el punt fix amb el CM del cos. En el SR que gira solidàriament amb el cos podem escriure $\boldsymbol{L} = I_3\omega_3\boldsymbol{e}_z$ on ω_3 es pot expressar en termes dels angles d'Euler en el SR inercial per (6.13), així $\boldsymbol{L} = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{e}_z \approx I_3\dot{\varphi}\cos(\theta)\boldsymbol{e}_z$ ja que considerem $\dot{\psi} \approx 0$, derivant respecte el temps el moment angular obtenim $\dot{L}_z = I_3\ddot{\varphi}\cos(\theta) - I_3\dot{\varphi}\sin(\theta)\dot{\theta} \approx -I_3\dot{\varphi}\sin(\theta)\dot{\theta}$, ja que considerem $\dot{\varphi} = ct.$.

Sabem que $\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}} \leftrightarrow N = \dot{L}$, fent el modul de les expressions obtingudes anteriorment i igualant-les trobem

$$mgd\sin(\theta) = I_3\dot{\varphi}\sin(\theta)\dot{\theta} \longleftrightarrow \dot{\theta} = \frac{mgd}{I_3\omega_3} \tag{6.17}$$

que relaciona la velocitat de precessió del cos $\dot{\theta}$ amb la velocitat de rotació ω_3.

6.3 Estabilitat

A partir de les Eq. d'Euler amb $\boldsymbol{N} = \mathbf{0}$ estudiem que li passaria a un solid rígid qualsevol quan es produeix un petita pertorbació. Suposem que el cos gira al voltant de l'eix x, $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_x$, si li apliquem una petita pertorbació la velocitat angular ara serà $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_x + \lambda \boldsymbol{e}_y + \mu \boldsymbol{e}_z$ amb $\lambda\mu \approx 0$. Les equacions d'Euler seran

$$\begin{cases} I\dot{\omega}_1 & = (I_2 - I_3)\lambda\mu \approx 0 \\ I\dot{\lambda} & = (I_3 - I_1)\omega_1\mu \\ I_3\dot{\mu} & = (I_1 - I_2)\omega_1\lambda \end{cases}$$

De la primera traiem que $\dot{\omega}_1 \approx 0 \to \omega_1 = ct.$, així podem escriure les dues restant equacions com

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} + \Omega\lambda = 0 \\ \ddot{\mu} + \Omega\mu = 0 \end{cases}$$

on

$$\Omega^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_1^2$$

quan $\Omega^2 > 0$ el moviment no serà estable ja que donarà lloc solucions exponencials per λ i μ, en canvi, quan $\Omega^2 < 0$ el moviment estarà acotat i per tant serà estable. Aquest cas es donarà sempre que es compleixi que $I_1 > I_2, I_3$ o $I_1 < I_2, I_3$ per a qualsevol cos, és a dir, *el moviment respecte l'eix principal d'inercia major o menor donarà lloc a un moviment estable.*

7 Dinamica relativista

7.1 Introducció

La teoria de la relativitat restringida es basa ens els dos postulats següents:

1. Totes les lleis de la física són valides per a tots els sistemes inercials.
2. La velocitat de la llum en el buit és igual per a tots els observadors i té el valor de $299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, independentment de l'estat de moviment de l'emissor.

A partir d'aquest postulats es dedueix que l'espai i el temps ja no són universals sinó que depèn del sistema de referència des del qual es mesura el succés, així si tenim una partícula a $\boldsymbol{r}'$ respecte un SR Σ', que es mou amb velocitat $\boldsymbol{v} = (v_x, 0, 0)$ respecte un SR Σ paral·lel a aquest llavors les transformación de coordenades de Σ a Σ', anomenades **transformacions de Lorentz** són:

$$\begin{cases} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{7.1}$$

on γ i β són funcions de la velocitat entre sistemes de referencia:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ; \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{7.2}$$

Partint de (7.1) podem deduir-ne les transformacions de les coordenades de la velocitat derivant respecte el temps les expressions anteiors, tenint en compte que

$$dx'(x,t) = \gamma(dx - vdt) \qquad dt'(x,t) = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)$$

així obtenim

$$\begin{cases} u_x &= \dfrac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u_{y,z} &= u'_{y,z}\dfrac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{\left(1 + u'_x v/c^2\right)} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u'_x &= \dfrac{u_x - v}{1 + u_x v/c^2} \\ u'_{y,z} &= u_{y,z}\dfrac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{\left(1 + u_x v/c^2\right)} \end{cases} \tag{7.3}$$

que per una transformació general passen a ser

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} - \boldsymbol{\beta}\gamma ct \tag{7.5}$$

7.2 Grup de Lorentz

Per al cas relativista, treballem en el grup de Lorentz $SO(3,1)$ on un element d'aquest l'espai ve determinat per $(x^0, \boldsymbol{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$. Per exemple, si $\mathbb{X}$ representa el quadrivector espai-temps tindrem que $x^0 = ct$ i $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$.

El producte escalar en aquest grup ve donat per la mètrica de Minkowski $g_{\mu\nu}$ definida per

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Una de les característiques d'aquesta mètrica és que és degenerada, és a dir, $\exists \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}: \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Recordem que la funció de la mètrica és la que ens defineix el producte escalar en un espai i ens puja o baixa index, és a dir, donat $x^\mu \in SO(3,1)$ llavors

$$x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu \quad , \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x^\nu$$

que ens genera un canvi de signe en les coordenades espaials $x_\mu = (x_0, -\boldsymbol{x})$. Sigui $x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x})$ i $y^\mu = (y^0, \boldsymbol{y})$ llavors el producte escalar és

$$x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu = x^0 y_0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y_i \tag{7.7}$$

Volem estudiar ara com transforma la mètrica sota un canvi de coordenades definit per $x^\nu \to \Lambda^\nu_\alpha x^\alpha = \tilde{x}^\nu$. Donats x^μ i y^μ sabem que el seu producte escalar s'ha de conservar en qualsevol SR, per tant

$$x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = \tilde{x}^\mu g_{\mu\nu} \tilde{y}^\nu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta y^\beta = \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu x^\mu y^\nu \Longrightarrow g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu$$

Les matrius Λ que compleixen la condició anterior són les que definiexen el grup $SO(3,1)$. També es pot escriure la condició com

$$g^{\mu\nu} = \left(\Lambda^t\right)^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta\nu} \tag{7.8}$$

Boost Considerem per simplicitat el grup $SO(1,1)$ amb $x_0 = ict$ i $x_1 = x$ on $x_0^2 + x_1^2 = ct.$. En aquest espai, realitzem un boost infinitesimal del tipus $x_1' = x_1 - t\delta v = x_1 + i\delta\beta x_0$ on $\beta = v/c$ i, per simetria, $x_0' = x_0 - i\delta\beta x_1$. Així la transformació que obtenim és

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = (\mathbb{I} + \sigma_2 \delta\beta) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

on $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ és la segona matriu de Pauli. Realitzant repetides transformacions infinitesimals fins a N cops, definim $\theta = N\delta\beta$, tenim

$$\boldsymbol{x}' = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{I} + \frac{\theta}{N}\sigma_2\right)^N \boldsymbol{x} = e^{\theta\sigma_2}\boldsymbol{x} = (\mathbb{I}\cosh\theta + \sigma_2 \sinh\theta)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -i\sinh\theta \\ i\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{7.10}$$

Notem que la transformació no està acotada, per tant, no pertany rigorosament a l'espai de Hilbert.

Si realitzem el cas particular on $x_1' = 0$, llavors $x_1 = vt$ i $x_4 = ict$ igualment, però tenim la relació

$$0 = x_1 \cosh\theta + ix_4 \sinh\theta \Rightarrow \tanh\theta = \frac{ix_1}{x_4} = \frac{v}{c} = \beta \tag{7.11}$$

i podem definir les ben conegudes quantitats

$$\gamma = \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta\gamma = \sinh\theta \tag{7.12}$$

Podem generalitzar al cas $SO(3,1)$ on $x_0' = x_0 - i\sum \delta\beta x_i$ i $x_i' = x_i + in_i x_0$ per $i = 1,2,3$ llavors tindríem que podem escriure la transformació com $\boldsymbol{x}' = L(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}$ on $L(\boldsymbol{v}) = \mathbb{I} + \sigma\sinh\theta + \sigma^2(\cosh\theta - 1)$:

$$L(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta n_x & -\gamma\beta n_y & -\gamma\beta n_z \\ -\gamma\beta n_x & 1 + (\gamma-1)n_x^2 & (\gamma-1)n_x n_y & (\gamma-1)n_x n_z \\ -\gamma\beta n_y & (\gamma-1)n_y n_x & 1 + (\gamma-1)n_y^2 & (\gamma-1)n_y n_z \\ -\gamma\beta n_z & (\gamma-1)n_z n_x & (\gamma-1)n_z n_y & 1 + (\gamma-1)n_z^2 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Recapitulant, per tornar a la vida real, definim el **quadrivector espai-temps** com $\mathbb{X} = (ct, x, y, z)$. Utilitzant aquest quadrivector podem expressar (7.1) en forma matricial com

$$\mathbb{X}' = \Lambda\mathbb{X} \longleftrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

Una propietat d'aquest espais és que el producte escalar de dos quadrivectors és invariant sota canvis de sistemes de referencia, en particular podem definir el modul al quadrat d'una variació infinitessimal del quadrivector espai-temps com

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = (ds')^2 \tag{7.15}$$

on la quantitat s^2 s'anomena **interval**. La invariància de l'interval expressada a (7.15), divideix de forma natural l'espai-temps en 4 regions, representades esquemàticament a la figura 6 relatives a un succes A situat a $x = y = z = t_A = 0$: (Goldstein, pg. 279)

- Si tenim un succés a B tal que $ds^2_{AB} > 0$ (time-like) llavors tots els observadors estaran d'acord amb l'ordre en que han succeït els dos successos. És inclús possible escollir un SR inercial on A i B tenen les mateixes coordenades espacials (però no temporals!!). Si $t_B < t_A$ en un SR, ho serà $\forall$ SR, a aquesta regió li'n diem *passat*.

  Per simetria, existeix una regió anomenada *futur* on un succés C amb temps t_C tal que $t_C > t_A$ per a tot SR inercial.

  Tots els successos del futur com del passat poden estar **causalment connectats** al succés A. Per un succés dintre del con de llum sempre existeix un SR en el qual aquest succés i l'origen (A) tenen les mateixes x, y, z coordenades.

- Si per contra tenim un esdeveniment a D fora del con llavors $ds^2_{AD} < 0$ (space-like) llavors existeix un SR inercial en el qual el ordres dels esdeveniments poden ser revertits o inclús fer-los iguals (igual temps però en un altre lloc, diferents coordenades espacials.). A aquesta regió sovint se l'anomina *elsewhere* o *elsewhen*.

  Qualsevol succés dintre del con NO pot estar connectat causalment amb un succés de fora del con, altrament, per connectar-los, faria falta una senyal que es desplacés a major velocitat que la de la llum.

- Separant els successos tipus temps amb els tipus espai tenim el con de llum sobre el qual $ds^2 = 0$ (light-like), format pels punts des dels quals la llum emesa pot arribar a A i als quals pot arribar la llum emesa per A. Només és el cas dels fotons que tenen massa nul·la i es mouen a velocitat c.

7.3 Sistema propi

Definim el sistema propi instantani Σ_p d'una partícula o un cos com aquells que es mou solidàriament amb el cos, és a dir, amb la mateixa velocitat que la partícula de manera que aquesta estigui sempre sobre l'origen de coordenades del nou sistema. Fent ús de la invariància de l'interval, tenim la igualtat

$$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cd\tau)^2$$

on τ és el temps propi de la partícula. Treien factor comú de $(cdt)^2$ obtenim la igualtat

$$dt = d\tau \frac{1}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2}} = d\tau \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma d\tau \tag{7.16}$$

Així, veiem que el temps no és igual per tots els sistemes de referencia sinó que estan relacionats per un factor *gamma*, el que implica que el temps passarà mes lentament en el SR mòbil, aquest fenomen s'anomena **dilatació temporal**. Una demostració alternativa es pot trobar a l'apèndix B.

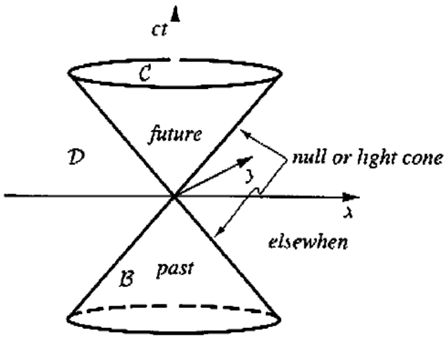


Figura 6: L'interior dels cons de llum representen possibles trajectòries d'observadors inercials que es mouen amb velocitat constant $< c$ passant per l'origen. L'exterior dels cons, no està en connexió causal amb l'origen.

Com que τ és invariant, es poden obtenir més quadrivectors derivant respecte aquest quantitat el quadrivector espai-temps:

- Quadrivector velocitat: $\mathbb{V} = \frac{d}{d\tau}\mathbb{X} = \frac{d}{d\tau}(ct, \boldsymbol{r}) = \gamma(c, \boldsymbol{v})^*$. El seu modul al quadrat és també invariant
$$\mathbb{V}^2 = \langle \mathbb{V}, \mathbb{V} \rangle = \mathbb{V}^\mu g_{\mu\lambda} \mathbb{V}^\lambda = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 > 0 \tag{7.17}$$
- Quadrivector moment: $\mathbb{P} = m\mathbb{V} = m\gamma(c, \boldsymbol{v}) = (m\gamma c, \boldsymbol{p}) = (E/c, \boldsymbol{p})$, on m és la massa en repòs (invariant) i $\boldsymbol{p}$ el moment lineal relativista definit com
$$\boldsymbol{p} \equiv m\gamma\boldsymbol{v} \tag{7.18}$$
El seu modul al quadrat és també invariant
$$\mathbb{P}^2 = \langle \mathbb{P}, \mathbb{P} \rangle = \mathbb{P}^\mu g_{\mu\lambda} \mathbb{P}^\lambda = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2 \geq 0 \tag{7.19}$$
- Quadrivector acceleració: es defineix com $\mathbb{A} = \frac{d}{d\tau}\mathbb{V}$ que és una mica més triki de calcular però finalment s'obté
$$\mathbb{A} = \left(\gamma^4 \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}}{c}, \gamma^2 \boldsymbol{a} + \gamma^4 \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}\boldsymbol{v}\right) = \gamma^4 \left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}}{c}, \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})}{c^2}\boldsymbol{v}\right) \tag{7.20}$$
on hem fet servir que $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ i $\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^4 \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}$. Utilitzant l'última expressió per la quadrivelocitat podem demostrar fàcilment que $\mathbb{V} \perp \mathbb{A}$
$$\langle \mathbb{V}, \mathbb{A} \rangle = \gamma^5 \left[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}))\right] = 0$$
ja que $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})$.
- Quadrivector força: un cop obtinguda la quadrivelocitat, la força relativitat en coordenades serà
$$\mathbb{F}^\mu = m\mathbb{A}^\mu \tag{7.21}$$
Una definició alternativa és la que obtenim seguint els exemples de la mecànica clàssica com $\mathbb{F} = \frac{d\mathbb{P}}{d\tau}$ que ens portaria igualment al resultat anterior.

  Notem que en general aquests dos vector $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{a}$ no tenen perquè ser paral·lels.

Totes les quantitats anteriors, al ser quadrivectors, es transformen igual entre SR que $\mathbb{X}$ utilitzant la matriu Λ definida a l'eq. (7.14).

* $\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$

7.4 Col·lisions relativistes

Teorema 7.1. *En totes les col·lisions relativistes es conserva el quadrivector moment $\mathbb{P}$.*

Energia cinètica Definim l'energia cinètica com $K = \int_0^v dW$ on $dW = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$ és el treball fet sobre la partícula, així

$$K = \int_0^v \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} d\boldsymbol{r} = \int_0^v \boldsymbol{v} d\boldsymbol{p} = \int_0^v mc^2 d\gamma = m\gamma c^2 - mc^2 \tag{7.22}$$

on l'ultim terme es defineix com l'**energia en repòs** de la partícula

$$E_0 = mc^2 \tag{7.23}$$

Ara com que $\mathbb{P}$ i $\boldsymbol{p}$ es conversa implica que $m\gamma c$ també s'ha de conservar, multiplicant per c podem relacionar aquesta quantitat amb l'energia cinètica per

$$E = m\gamma c^2 = K + mc^2 \tag{7.24}$$

és a dir, l'energia total d'una partícula és la suma de l'energia en repòs més l'energia deguda al moviment (cinètica). Utilitzant aquesta nova igualtat podem escriure el quadrivector moment com $\mathbb{P} = (E/c, \boldsymbol{p})$, aplicant l'expressió (7.19) trobem la relació

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{7.25}$$

Tipus de col·lisions

- Elàstica: es conserva el quadrivector moment i l'energia cinètica, aquestes dues condicions porten a la conclusió que també es conserva la massa, és a dir, la col·lisió no canvia la identitat de les partícules.
- Inelàstica: es conserva el quadrivector moment però no l'energia cinètica, per tant part de matèria es pot transformar en energia i viceversa, la col·lisió canvia la identitat de les partícules.

Un altre factor a tenir en compte és que l'energia del sistema serà mínima en el SR centre de masses, això és degut a que en aquest sistema $\sum_i \boldsymbol{p}^{CM} = 0$ llavors

$$\Big(\sum_i E_i^S\Big)^2 - c^2\Big(\sum_i \boldsymbol{p}_i\Big)^2 = \Big(\sum_i E_i^{CM}\Big)^2 - c^2\Big(\cancelto{0}{\sum_i \boldsymbol{p}_i^{CM}}\Big)^2 \Longrightarrow E_t^{CM} < E^S$$

Scattering * Considerem una col·lisió protó-electró amb moments inicials $\mathbb{K}, \mathbb{P}$ i finals $\mathbb{K}', \mathbb{P}'$, respectivament. Suposem que l'electró esta quiet abans del xoc ($\boldsymbol{p} = 0$), aplicant la conservació del quadrivector moment obtenim $\mathbb{K} + \mathbb{P} = \mathbb{K}' + \mathbb{P}' \Rightarrow \mathbb{K}' - \mathbb{K} = \mathbb{P} - \mathbb{P}'$. Si elevem al quadrat la igualtat anterior i desenvolupem obtenim

$$\begin{cases} (\mathbb{K}' - \mathbb{K})^2 & = \mathbb{K}'^2 + \mathbb{K}^2 - 2\mathbb{K}'\mathbb{K} = -2\mathbb{K}'\mathbb{K} \\ (\mathbb{P} - \mathbb{P}')^2 & = \mathbb{P}'^2 + \mathbb{P}^2 - 2\mathbb{P}\mathbb{P}' = 2(m_e c)^2 - 2\mathbb{P}\mathbb{P}' \end{cases}$$

tenint en compte que

$$\begin{cases} \mathbb{K} & = kc \\ \mathbb{K}' & = k'c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \mathbb{P} & = m_e c^2 \\ \mathbb{P}' & = m_e c^2 - \boldsymbol{p} \end{cases}$$

llavors

$$-c^2 kk'(1 - \cos(\theta)) = (m_e c^2)^2 - (m_e c^2)\sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = m_e c^2[\mathbb{P} - \mathbb{P}'] = m_e c^2[k' - k]$$

fent l'àlgebra trobem la formula de la dispersió de Compton que relaciona la freqüència de la llum incident amb la de després del xoc

$$\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} = \frac{1 - \cos\theta}{mc} \tag{7.26}$$

*Aquí el PP es va fer la pitxa un lio degut a la seva fòbia a posar c i barrejar energia i moment lineal indiscriminadament.

8 Mecànica analítica

A petició de *El Salvador* (i l'ironia del creador) en aquest capítol el Putu Pineda Rotatiu (PP) passarà a denominar-se Putu Pineda Anal-itic (PPA). Suposu que també és d'utilitat comentar que el PPA a tornat a canviar de llibre de referencia per el GoldeIniestein.

Suposem un sistema de N partícules determinades per $\boldsymbol{r}_i(t)$ això, segons la mecànica Newtoniana, ens dona un sistema de $3N$, a més a més aquestes partícules poden estar subjectes a lligams entre elles, els qual poden ser:

- Holonomics: es diu dels lligams que es poden expressar de la forma $f(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; t) = 0$ (geomètrica) o $f(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N; t) = 0$ (diferencial), que un cop integrada a de donar la primera.
  - Escleronoms: si NO depenen explícitament del temps ($\partial f/\partial t = 0$).
  - Reonoms: si depenen explícitament del temps.
- No holonomics: si no es poden expressar de la manera anterior, és el cas de les desigualtats.

En el sistema anterior podem tenir k lligams $f_j(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; t) = 0$, per tant tindrem $n = 3N - k$ graus de llibertat. En general, podem determinar la posició d'una partícula a partir d'un conjunt de **coordenades generalitzades** $q_1, \ldots, q_n$ independents entre si (que tenen una dependència implícita amb el temps), així:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_n) \tag{8.1}$$

Desplaçaments

- Desplaçament real: $d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t + dt) - \boldsymbol{r}_i(t) = \boldsymbol{v}_i dt = (d\boldsymbol{r}_i/dt)dt$.
- Desplaçament virtual: $\delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i(t) - \boldsymbol{r}_i(t)$ que ens indica la diferencia entre el cami real seguit $\boldsymbol{r}$ determinat per la mecànica Newtoniana i un d'aleatori $\boldsymbol{r}'_i$.

L'objectiu de la mecànica analítica serà trobar el camí que fa mínim el desplaçament virtual, és a dir, el camí real.

8.1 Equacions de Lagrange

Considerem un sistema en el qual $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$ i distingim entre forces efectives $\boldsymbol{F}_i^e$ i forces de lligams $\boldsymbol{R}_i$[*], el treball realitzat per una partícula serà:

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^e \delta\boldsymbol{r}_i + \cancelto{0}{\sum_i \boldsymbol{R}_i \delta\boldsymbol{r}_i} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^e \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

el segon terme es cancel·la degut a que el desplaçament sempre és perpendicular a les forces de lligams.

Si ara considerem $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_i \Rightarrow \sum_i \boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{0}$ i fent el mateix raonament que abans arribem al **Principi de treball virtual** o **Principi de D'alembert**:

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i)\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{8.2}$$

Aquesta expressió és equivalent a trobar el cami $\boldsymbol{r}_i$ que fa mínima una funció $f(\boldsymbol{r}_i)$.

Derivant respecte el temps l'expressió (8.1) trobem

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{\delta \boldsymbol{r}_i}{\delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{8.3}$$

[*] Les forces de lligam et garanteixen que la partícula es mou dintre el pla, un exemple són les forces normals.

L'últim terme apareix de la dependència explicita en t.* És a dir, la derivada total d'un vector funció de q_j és:

$$\frac{d}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{8.4}$$

It's algebra time! Comencem substituint $\delta \boldsymbol{r}_i$ a (8.2):

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i)\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[(\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right]$$

Mirem cada terme per separat:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_j \left(\sum_i \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{8.5}$$

On trobem Q_j que es defineix com la **força generalitzada**. Anem amb el terme $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ que considerarem el cas no relativista on $\boldsymbol{p}_i = m\dot{\boldsymbol{r}}_i$:

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

Fent servir la igualtat (8.4) calculem els dos sumands anteriors:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j} \\ \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d \boldsymbol{r}_i}{dt} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d \boldsymbol{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_k \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{8.7}$$

L'última igualtat és deguda a que tant el primer com l'últim terme contenen derivades parcials respecte $\dot{q}_j$ però $\boldsymbol{r}_i$ tal com s'ha definit a (8.1) no és funció de $\dot{q}_j$ per tant aquests termes són 0, d'altra banda, com que q_j són funcions independents llavors $\partial \dot{q}_k / \partial \dot{q}_j = \delta_{kj}$.

Un cop obtinguts aquests resultats els substituïm a l'equació inicial per a expressar-la només en funció de $\boldsymbol{v}_i$:

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \tag{8.8}$$

On hem fet servir que $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$ és l'energia cinètica total del sistema.

Ajuntant els resultats obtinguts a (8.5) i (8.8) obtenim

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

que degut a que q_j són independents, l'única manera que la suma sigui sempre igual a 0 és que tots els coeficients siguin igual a 0. Així, obtenim les **equacions de Lagrange en forma generalitzada**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{8.9}$$

On Q_j fa el paper de la força $\boldsymbol{F}$ i la part de l'esquerra el de $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ en la 2ª llei de Newton.

*D'ara en endavant tots els sumatoris que facin referencia a les partícules aniran expressat amb l'index i i es sumaran de $1 - N$, d'altra banda, els sumatoris referits a les coordenades generalitzades aniran expressats amb l'index j que es sumarà de $1 - n$ on $n = 3N - k$.

Potencial Considerem un potencial $V = V(\boldsymbol{r}_i; t) = V(q_j; t)$ on $\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i V = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$, substituïm aquest resultat a (8.5) per obtenir Q_j en funció del potencial

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{8.10}$$

Així podem substituir a (8.9) per tal de re-expressar aquesta igualtat en termes de T i V, tenint en compte que V no depèn de $\dot{q}_j$, és a dir, $\partial V \big/ \partial \dot{q}_j = 0$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longleftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

I pum Lagrangià. Definim $\mathcal{L} = T - V$ on $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j; t)$ i obtenim les **equacions de Lagrange**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n} \tag{8.11}$$

També podem definir el potencial generalitzat com $U = U(\boldsymbol{r}_i; \dot{\boldsymbol{r}}_i; t)$ depenent de $\boldsymbol{r}_i$ i de la seva derivada temporal on la força serà en aquest cas

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

Fem el mateix que anteriorment, calculem Q_j i substituïm a l'eq. de Lagrange en forma generalitzada:

$$\begin{aligned} Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right] - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{8.12}$$

On s'han fet servir les identitats (8.6) i (8.7) entre el segon i tercer pas. Substituïm trivialment a (8.9) per trobar (8.11) on en aquest cas el lagrangià és $\mathcal{L} = T - U$.

En cas que hi hagin forces no derivables d'un potencial $\tilde{Q}_j$ sempre podrem separar en dos termes $Q_j^T = Q_j + \tilde{Q}_j$ i les equacions de Lagrange quedaran com

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j \qquad \forall j = 1, \dots, n \tag{8.13}$$

Observacions

- El potencial V és conservatiu si i només si $V \neq V(t)$, és a dir, no hi ha dependència implícita en el temps.
- El lagrangià es preserva sota canvis de coordenades. Donades unes coordenades generalitzades q_j, el lagrangià en $\tilde{q}_j$ on $q_j = q_j(\tilde{q}_j; t)$ serà igual al primer si el Jacobià de la transformació és diferent de 0: $\dfrac{\partial(q_j)}{\partial(\tilde{q}_j)} \neq 0$.
- El lagrangià **no és unívoc**, les equacions de Lagrange són iguals si s'afegeix un terme $\dfrac{dF(q_j; t)}{dt}$ a $\mathcal{L}$.

- Les equacions de Lagrange no constitueixen una nova teoria sinó que són només una reformulació de la mecànica newtoniana, així en comptes d'utilitzar forces actuant sobre un cos la mecànica analítica utilitza el concepte d'energia associada a un cos. Des d'un punt de vista filosòfic, la formulació Newtoniana associem un *efecte* amb la *causa* (el moviment amb la força) mentre que, d'acord amb el principi de Hamilton, el moviment es degut a l'intent de la natura d'aconseguir una *objectiu*: minimitzar la integral temporal de la diferencia entre l'energia cinètica i el potencial (lagrangià).

8.2 Lleis de conservació

Les equacions de Lagrange ens porten a n equacions diferencials de segon ordre en $\ddot{q}_j$, volem trobar una funció $f(q_j; \dot{q}_j; t) = ct.$ el que portarà a l'existencia d'una simetria en el sistema.

Moment generalitzat És una funció $p_j = p_j(q_j; \dot{q}_j; t)$ que es defineix com*

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \tag{8.14}$$

amb aquesta notació les equacions de Lagrange es poden expressar com

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \tag{8.15}$$

Coordenada cíclica Una coordenada q_j és cíclica si $\partial\mathcal{L}/\partial q_j = 0$, és a dir, que per (8.15) tenim $\dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = ct.$ *sempre que hi ha una simetria existeix una coordenada q_j cíclica.*

Conservació de l'energia Calculem la derivada total del lagrangià $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j; t)$ respecte el temps:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Aquest resultat és per una $\mathcal{L}$ qualsevol, però quan aquest sigui solució de les equacions de Lagrange llavors per (8.11) obtenim

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}\right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Definim la quantitat entre parèntesis com el Hamiltonià $\mathrm{H} = \mathrm{H}(q_j; \dot{q}_j; t)$:

$$\mathrm{H} \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \tag{8.16}$$

que compleix l'equació

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{8.17}$$

Si $\mathcal{L}$ no té una dependència explicita en el temps, en aquest cas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j) \Rightarrow \partial\mathcal{L}/\partial t = 0$. Amb aquest resultat, tenint en compte (8.17), veiem que $\mathrm{H} = ct.$.

Considerem ara, en aquest mateix cas, que podem expressar $\mathcal{L}$, T i V com una suma de polinomis homogenis respecte la variable $\dot{q}_j$, és a dir: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $T = T_0 + T_1 + T_2$ i $V = V_0 + V_1 + V_2$ (això serà possible sempre que el potencial no sigui generalitzat, $V = V(q_j; t)$). El potencial V serà simplement igual a V_0 ja que $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 = 0$, d'altra banda, l'energia cinètica la podem calcular tenint en compte que la velocitat ve donada per l'eq. (8.3)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left\{\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2\sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial r}\right)^2\right\} = T_2 + T_1 + T_0 \tag{8.18}$$

*En general, no te res a veure amb el moment lineal $\boldsymbol{p}$.

però com que ens trobem en un sistema esclerònom $\partial \boldsymbol{r}/\partial t = 0$ per tant $T = T_2$. Abans de procedir enunciem el teorema d'Euler que ens serà útil pel calcul del Hamiltonià

Teorema 8.1 (Teorema d'Euler)**.** *If f is a homogeneous function of degree n wrt* les variables x_i ($f(\lambda x_i) = \lambda^n x_i$) llavors es compleix que $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf$.†*

Tenint en compte aquesta igualtat calculem H:

$$\mathrm{H} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \overset{\text{T. Euler}}{=} 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0$$

On cada terme del Lagrangià és: $\begin{cases} \mathcal{L}_0 & = T_0 - V_0 = -V_0 = -V \\ \mathcal{L}_1 & = T_1 - V_1 = 0 \\ \mathcal{L}_2 & = T_2 - V_2 = T_2 = T \end{cases}$ per tant substituint a l'equació anterior trobem que

$$\mathrm{H} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0 = T + V = E = ct. \tag{8.19}$$

> El Hamiltonià d'un sistema és igual a l'energia mecànica total d'aquest si:
>
> - El sistema és escleronom, q_j no tenen dependencia explicita en el temps, i llavors, l'energia cinètica és una funció homogènia de segon grau en les velocitats $\dot{q}_j$.
> - El potencial no depèn de les velocitats: $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$ (no és generalitzat).
>
> si, a més a més, el lagrangià no depèn explícitament del temps llavors $H = E = ct$.

Podem calcular quan val la variació de l'energia si el sistema no es escleronom, on $d\mathcal{L}/dt \neq 0$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Sent $T = T(q_j; \dot{q}_j; t)$ i $V = V(q_j; t)$ calculem les derivades totals anteriors

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j\right] + \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&\overset{(8.9)}{=} \frac{d}{dt}[2T_2 + T_1] + \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_j Q_j \dot{q}_j = 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}[T_1 + 2T_0] + \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_j Q_j \dot{q}_j \\
\frac{dV}{dt} &= \sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} \overset{(8.10)}{=} \sum_j [\tilde{Q}_j - Q_j]\dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} \leftrightarrow -\sum_j Q_j \dot{q}_j = \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_j \tilde{Q}_j \dot{q}_j
\end{aligned}$$

Substituint l'última igualtat a la derivada temporal de T i reordenant els termes obtenim

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}[T + V] = \frac{d}{dt}[T_1 + 2T_0] - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_j \tilde{Q}_j \dot{q}_j \tag{8.20}$$

Per completitud, podem suposar que les forces generalitzades $\tilde{Q}_j$ provenen d'un potencial $U = U(q_j; \dot{q}_j; t)$, així sabent que

$$\frac{dU}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial U}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial U}{\partial t}$$

*wrt ≡ with respect to

†Frase escrita tal qual el PPA la va escriure a la pissarra.

juntament amb (8.12) arribem a una expressió per aquest últim terme

$$\sum_j \tilde{Q}_j \dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] + \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{dU}{dt}$$

que substituint a (8.20) ens porta a que la derivada temporal de l'energia és

$$\frac{d}{dt}[E+U] = \frac{d}{dt}[T+V+U] = \frac{d}{dt}[T_1 + 2T_0] - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (V+U)}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] \tag{8.21}$$

8.3 Hamilton's formulation

En l'apartat anterior ja hem definit $\mathrm{H} = \mathrm{H}(q_j;\dot{q}_j;t) = \sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j;\dot{q}_j;t)$ on p_j ve donat per (8.14), ara suposarem que podem escriure

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}(q_j;p_j;t) = \sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j;p_j;t) \tag{8.22}$$

on hem canviat la dependència en $\dot{q}_j$ per p_j. Això serà possible si el Jacobià de la transformació $p_j \leftrightarrow \dot{q}_k$ no és nul: $\frac{\partial(p_j)}{\partial(\dot{q}_k)} \neq 0$, si es dona el cas, podrem escriure $\dot{q}_k = f_k(q_j;p_j;t)$.

Deducció de les equacions de Hamilton Comencem calculant el diferencial de $\mathcal{L}$ i H (l'ultim com a funció de q_j, p_j, t):

$$d\mathcal{L} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt \overset{(8.15)}{=} \sum_j [\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$
$$d\mathrm{H} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_j}dp_j\right] + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}dt \overset{(8.22)}{=} \sum_j [\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j] - d\mathcal{L}$$

Substituint $d\mathcal{L}$ a l'última expressió obtenim

$$d\mathrm{H} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_j}dp_j\right] + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}dt = \sum_j [\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

I degut a que dq_j i dp_j són funcions LI l'única manera que es compleixi aquesta igualtat és que els coeficients siguin iguals, és a dir:

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_j} \quad ; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_j} \quad ; \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \tag{8.23}$$

Aquestes equacions es coneixen com **Equacions de Hamilton** o *canonical equations of motion.*

Recipe finding a Hamiltonian

1. Troba el lagrangià $\mathcal{L}(q_j;\dot{q}_j;t)$.
2. Troba els moments generalitzats $p_j = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$.
3. Expressa $\dot{q}_j$ en termes de p_j ($\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_j;p_j;t)$) quan el Jacobià de la transformació no sigui 0: $\det\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k} \neq 0$.
4. Expressa H en termes de p_j: $\mathrm{H}(q_j;p_j;t) = \sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j;\dot{q}_j;t)$.
5. Have fun solving the equations of motion!!! ;)

Poisson brackets Donades 2 funcions $f(q_j;p_j;t)$ i $g(q_j;p_j;t)$ es defineixen els Poisson brackets com

$$\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right] \tag{8.24}$$

En concret, si f és q_i o p_i obtenim les relacions

$$\{q_j,f\} = \frac{\partial f}{\partial p_j} \qquad ; \qquad \{p_j,f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_j}$$

Sigui $F = F(q_j;\dot{q}_j;t)$ llavors la seva derivada temporal es pot expressar segons els Poisson brackets com

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \frac{\partial F}{\partial t} \overset{(8.23)}{=} \sum_j\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Tenint en compte aquest resultat poden reexpresar les equacions de Hamilton com*

$$\dot{q}_j = \{q_j,H\} \qquad ; \qquad \dot{p}_j = \{p_j,H\} \tag{8.25}$$

Propietats

- Antisimètric: $\{f,g\} = -\{g,f\} \Longrightarrow \{f,f\} = 0$
- Lineal: $\{aA+bB,C\} = a\{A,C\} + b\{B,C\}$
- John Doe: $\{AB,C\} = A\{B,C\} + \{A,C\}B$
- Identitat de Jacobi: $\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0$

Si considerem $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrius es fàcil veure que $\{A,B\} = AB - BA$† i es compleixen totes les propietats anteriors. D'aquesta manera podem tornar a reexpressar les equacions de Hamilton ara en forma matricial (Ueeeee!! som-hi), definim els vectors $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots,q_n)^t$, $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_n)^t$,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{q}}\\ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{p}}\end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{2n}$$

per tal de poder escriure

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathcal{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta},\mathrm{H}\} \qquad ; \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{I}_n\\ -\mathbb{I}_n & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \tag{8.26}$$

A partir de la definició de $\mathcal{J}$ podem expressar els poisson brackets de dues funcions qualsevol com $\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^t \mathcal{J}\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)$ i en concret $\{\boldsymbol{\eta},f\} = \mathcal{J}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)$ i $\{\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\} = \mathcal{J}$ que s'identifiquen amb les relacions trobades anteriorment.

Teorema 8.2 (Poisson-Jacobi). *Les quantitats conservades es conserven sota els parèntesis de Poisson, és a dir, siguin $f = f(q_j;p_j;t)$ i $g = g(q_j;p_j;t)$ integrals de moviment ($\dot{f} = \dot{g} = 0$) llavors* $\frac{d}{dt}\{f,g\} = 0$.

*Aquí el PPA es patilla el terme $\partial F/\partial t$ argumentant que q_i i p_j no tenen una dependència explicita en el temps. (I diràs: pos muy bien, bueno saberlo)

†Existeix l'anomenat principi de correspondència entre la mecànica clàssica i quàntica que relaciona el parèntesi de Poisson amb el commutador on

$$\{f,g\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{f},\hat{g}]$$

Molts dels resultats que podem treure de la mecànica clàssica són igual de valid per la mecànica quàntica reemplaçant el parèntesi de Poisson pel commutador d'operadors.

8.4 Principi variacional

Tenim un Lagrangià $\mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j; t)$ on q_j són les coordenades generalitzades i hem eliminat tots els lligams holonoms, definim l'**acció** S com la integral del lagrangià des d'un temps inicial t_1 fins a un temps final t_2:

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j(t); \dot{q}_j(t); t) dt = S(t_1, t_2; [q_j(t)]) \tag{8.27}$$

on $[q_j(t)]$ ens indica que l'acció depèn funcionalment de q_j, és a dir, depèn del camí. Aquests camí q_j serà *cinematicament possible* si es compleix que $\begin{cases} q_j(t_1) = q_1 \\ q_j(t_2) = q_2 \end{cases}$ i $q_j \in \mathcal{C}^2[t_1, t_2; \mathbb{R}]$ o, si compleix les equacions de Lagrange (8.11).

Teorema 8.3 (Pricipi de Hamilton)**.** *De totes les possibles trajectòries al llarg dels quals un sistema dinàmic es pot moure des d'un punt fins a una altra configuració en l'espai en un interval de temps especific, la trajectòria seguida serà la que minimitzi la integral temporal del Lagrangià del sistema* $\delta S = 0$.

Per tal de demostrar aquest teorema definim primer els següents conceptes:

- Si q_j és continua en un interval finit llavors q_j és acotada en aquest interval.
- Si $\tilde{q}_j \in$ entorn de q_j llavors es compleix que extrem$\{|\tilde{q}_j(t) - q_j(t)|\} < \epsilon \ \forall t \in [t_1, t_2]$.
- Si $\tilde{q}_j = q_j + \delta q_j$ llavors $S([q_j + \delta q_j]) - S([q_j]) \equiv \delta S$ quan $\delta q_j \to 0$.

Procedim amb el calcul de $S([q_j + \delta q_j])$:

$$\begin{aligned} S([q_j + \delta q_j]) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\tilde{q}_j(t); \dot{\tilde{q}}_j(t); t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j(t); \dot{q}_j(t); t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_j \right\} dt \\ &= S([q_j]) + \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right\} dt + \sum_j \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} [\delta q_j]_{t_1}^{t_2}} \\ &= S([q_j]) + \delta S \end{aligned}$$

Veiem que δS serà igual a 0 quan totes les integrals s'anul·lin, però com que δq_j són LI per a que això es compleixi s'ha d'anul·lar el terme entre claus que correspon a que q_j compleixi l'equació de Lagrange (8.11).

Teorema 8.4 (Principi d'equivalencia)**.** *Una funció és solució de les equacions de Lagrange si i només si es compleix el principi de mínima acció* ($\delta S = 0$)*.*

$$\left.\begin{aligned} \delta S = 0 \\ \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \\ q_j(t_1) = q_1 \quad q_j(t_2) = q_2 \end{cases}$$

La demostració cap a la dreta es evident com hem vist, si q_j compleix les equacions de Lagrange llavors clarament $\delta S = 0$; cap a l'esquerra hem de veure que δq_j són LI, això serà cert si es compleix la condició $\det \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \neq 0$ (la mateixa que demanàvem per a poder calcular el Hamiltonià).

Un dels problemes del principi de mínima acció és que dóna un indeterminat nombre de solucions ja que si al lagrangià inicial $\mathcal{L}$ li sumem un terme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q_j; t)$ i calculem la variació de $\tilde{S} = \int (\mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f) dt$ trobem que

$$\delta \tilde{S} = \delta \left(\int \mathcal{L} dt + \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} dt \right) = \delta(S + f(q_2, t) - f(q_1, t)) = \delta S$$

ja que q_1 i q_2 estan fixats per a qualsevol camí, per tant la seva variació serà 0, el que implica que aquesta nova funció compleix també el principi de mínima acció.

8.5 Exemples

Electromagnetisme Considerem una partícula movent-se en un camp electromagnètic general donat per $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$, el seu lagrangià serà

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + \frac{q}{c}A_i\dot{x}_i - q\phi \tag{8.28}$$

on $\phi(\boldsymbol{r},t)$ i $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ són el potencial escalar i el potencial vector (notem que al dependre de la velocitat l'energia potencial hem de fer servir el potencial generalitzat). Les coordenades generalitzades són $q_j = x_j$ que tenen, cada una d'elles, un moment generalitzat donat per

$$p_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i$$

Un cop obtinguts podem calcular l'Hamiltonià a partir de (8.22)

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}(p_i - \frac{q}{c}A_i)(p_i - \frac{q}{c}A_i) + q\phi$$

Relativitat Per a trobar un lagrangià que compleixi els principis de la relativitat fem un ansats (un guess vamos) i suposem

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V \tag{8.29}$$

sent $\beta^2 = \boldsymbol{v}^2/c^2$.Apliquem l'equació de lagrange per a cada una de les coordenades generalitzades x_i:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i$$

que ens porta a l'equació de Newton per a velocitats relativistes. Podem ara calcular el Hamiltonià

$$\mathrm{H} = v_jp_j - \mathcal{L} = \frac{mv_iv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + V = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = T + V = E$$

que correspon a l'energia total d'aquesta partícula.

Veiem que aquí hem trobat que l'energia cinètica és $T = mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$ mentre que a (8.29) apareix $-mc^2\sqrt{1-\beta^2}$ que correspon al terme cinètic, aquests termes no són iguals i això és degut a que volem imposar que H sigui igual a l'energia total, per aquest motiu hem de fer servir aquest terme cinètic en el $\mathcal{L}$ i no l'energia cinètica com a tal.

Per acabar de matar-ho es poden ajuntar els dos últims fenòmens i considerar el cas d'una partícula relativista movent-se en un camp electromagnètic, així substituiríem l'energia cinètica a (8.28) pel seu equivalent relativista per obtenir $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$. Els moments generalitzats respecte x_i serien $p_i = mv_i + \frac{q}{c}A_i$ que porten a $\mathrm{H} = T + q\phi$ sent T l'energia cinètica relativista de la partícula.

Baldufa ("A això encara li donaré més voltes, mai millor dit, je je", PPA 17/05/2017)

Considerem una baldufa simètrica, amb moments d'inercia (I, I, I_3), rotant al voltant del seu eix z sota els efectes de la gravetat (considerem $g = ct.$), podem escriure la seva energia cinètica i potencial com

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}I(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \overset{(6.13)}{=} \frac{1}{2}I[\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi}\sin\theta)^2] + \frac{1}{2}I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta]^2 \\
V &= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{g} = Mgl\cos\theta \\
\Longrightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}I[\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi}\sin\theta)^2] + \frac{1}{2}I_3[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta]^2 + Mgl\cos\theta
\end{aligned}$$

Estudiem el cas de les coordenades cícliques ψ i ϕ, com hem vist anteriorment p_ψ i p_ϕ seran constant del moviment per tant ho podrem escriure com

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_3 = ct.$$
$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = ct.$$

D'aquestes dues equacions podem aïllar $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$ en funció només de θ:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{I\sin^2\theta} \tag{8.30}$$
$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I\sin^2\theta}\cos\theta \tag{8.31}$$

Per últim degut a que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = ct.$ que es pot escriure

$$E = \frac{1}{2}I[\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi}\sin\theta)^2] + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + Mgl\cos\theta = ct.$$

com que $I_3\omega_3^2 = p_\psi^2/I_3 = ct.$ podem definir la quantitat $E' \equiv E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = ct.$, així substituint $\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$ obtenim

$$E' = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V_e(\theta) \tag{8.32}$$

Aïllant d'aquesta expressió $\dot{\theta}$ i integrant podem conèixer $t(\theta) \leftrightarrow \theta(t)$ que substituint a $\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$ ens portarien a trobar les equacions de moviment de la baldufa un cop determinades les condicions inicials per p_ψ, p_ϕ i E'.

Una manera més rebuscada de trobar el moviment de la baldufa a lo PPA style es definint $p_\psi = I \cdot a$, $p_\phi = I \cdot b$, $\alpha = 2E'/I$, $\beta = 2Mgl/I$ per obtenir les expressions següents equivalents a les anteriors:

$$\dot{\phi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$\dot{\psi} = \frac{I}{I_3}a - \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta$$
$$E' = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(b - a\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta$$

I fent el canvi de variable $u = \cos\theta$ per aillar $\dot{u}$ de E' obtenim:

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 = f(u) \longleftrightarrow t_f - t_i = \int_{u(t_i)}^{u(t_f)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

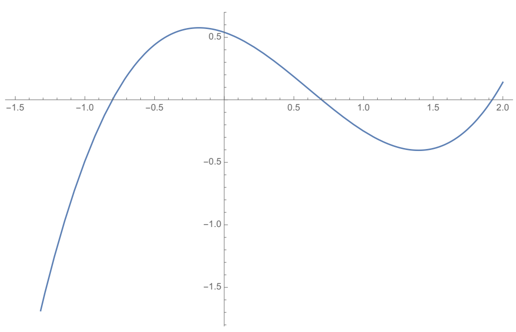


Figura 7: Comportament de $f(u)$.

Fent un cop d'ull a la figura 7 veiem que existeixen 3 zeros u_1, u_2 i u_3 de $f(u)$, un dels quals fora de l'interval d'angles reals ($u = \cos\theta > 1$). D'altra banda, com que $\dot{u}^2 = f(u)$ el moviment està restringit als punts on $f(u) > 0$, per tant $u \in [u_1, u_2]$, és a dir, l'angle θ anirà oscil·lant entre dos valors θ_1 i θ_2 donats per $\theta_i = \arccos u_i$.

Per tal d'estudiar els diferents casos de moviment definirem $u' = b/a$ així:

$u' > u_2$ A partir de l'equació per $\dot{\phi}$ veiem que el seu signe vindrà donat per $b - a\cos\theta = (u' - u)/a$, com que u sempre serà menor que $u_2 < u'$ llavors el signe de $\dot{\phi}$ romandrà constant i es produirà un moviment com el de la figura 8a.

$u_1 < u' < u_2$ Fent el mateix desenvolupament que abans, en aquest cas u' ja no serà sempre més gran que u_2 per tant el signe de $\dot{\phi}$ variarà i obtindrem un moviment com el de la figura 8b.

$u' = u_2$ Per el cas limit, considerem que $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ i $\dot{\phi}(t = 0) = 0$, de la última traiem que $b - a\cos\theta_0 = 0 \Rightarrow u_0 = u_2$, és a dir, per a donar-se aquest cas l'angle inicial ha de correspondre a un dels zeros de $f(u)$. Per tal d'analitzar com varia θ veiem que l'energia inicial és $E' = Mgl\cos\theta_0$ que ha de ser igual a l'energia en qualsevol instant de temps donada per (8.32), així com que ambdós dos primers sumands d'aquesta expressió són positius només podran créixer i l'única possibilitat per tal que es conservi l'energia és que $Mgl\cos\theta$ decreixi $\Rightarrow \theta \uparrow$. El moviment que es produeix és el donat per la figura 8c on la baldufa comença a $\theta_2 = \theta_0$ (angle mínim) i cau (augmenta θ) fins arribar a θ_1 on s'inverteix la situació.

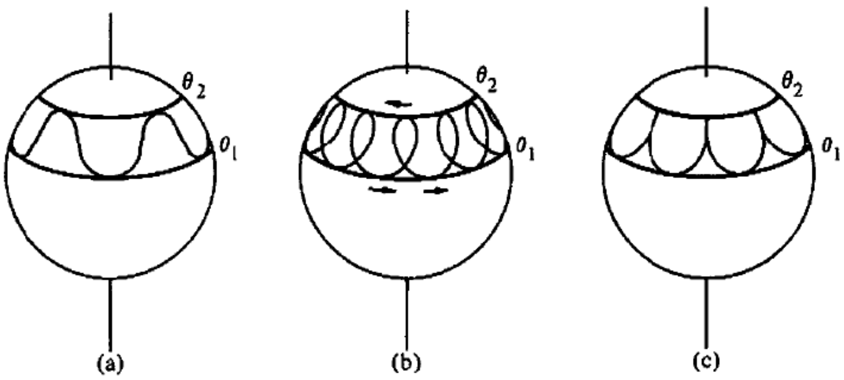


Figura 8: Il·lustració dels possibles casos de nutació en una baldufa simetrica en gravetat.

Baldufa ràpida Tenint en compte els resultats anteriors, considerem el cas $\frac{1}{2}I_3\omega_3 \gg 2Mgl$ amb les condicions inicials $u_0 = u_2 = b/a \Rightarrow \alpha = \beta u_0^2$, així podem escriure $f(u)$ com

$$f(u) = (u_0 - u)[\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]$$

Un dels zeros ja veiem que és clarament u_2 i l'altre zero u_1 el trobem resolent l'equació de segon grau del terme entre square brackets: $x_1^2 + px_1 - q = 0$ on $x_1 = u_0 - u_1$ és l'**extensió de la nutació**, $p \equiv a^2/\beta - 2\cos\theta_0$ i $q \equiv \sin^2\theta_0$; que té per solució en primer ordre

$$x_1 \approx \frac{q}{p} = \frac{\beta}{a^2}\sin^2\theta_0 = \frac{I}{I_3}\frac{2Mgl}{I_3\omega_3^2}\sin^2\theta_0$$

Veiem que l'extensió de la nutació x_1 (la distancia entre l'angle θ màxim i mínim) és proporcional a $1/\omega_3^2$, per tant, com més ràpid fem girar la baldufa, més petita serà la nutació.

La freqüència de nutació la podem trobar tenint en compte que $1 - u^2 \approx \sin\theta_0 \Rightarrow f(x) = \dot{x}^2 = a^2x(x_1 - x)$. Fent el canvi de variable $y = x - x_1/2$ (situant l'origen al centre de l'interval) obtenim l'equació diferencial

$$\dot{y}^2 = a^2\left(\frac{x_1^2}{4} - y^2\right) \longrightarrow \ddot{y} + a^2 y = 0$$

que amb les condicions inicials $x(0) = 0$ te per solució

$$x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos(at)) \quad ; \quad a = \frac{I_3}{I}\omega_3 \tag{8.33}$$

La freqüència angular de nutació de la baldufa entre els angles $\theta_0 = \theta_2$ i θ_1 és $a = \omega_3 I_3/I$ que augmenta linealment amb la velocitat angular de la baldufa.

La velocitat angular de precessió vindrà donada per $\dot{\phi}$, fent les mateixes aproximacions juntament amb (8.33) trobem

$$\dot{\phi} = \frac{a}{\sin^2\theta}(u - u_0) = \frac{ax}{\sin^2\theta} \approx \frac{\beta}{2a}(1 - \cos(at))$$

Així, la velocitat de precessió no és uniforme sinó que varia harmònicament amb el temps, fent el promig al llarg d'un període trobem que la velocitat mitja de precessió és

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3} \tag{8.34}$$

la qual decau a mesura que ω_3 augmenta.

"We are now in a position to present a complete picture of the motion of the fast top when the figure axis initially has zero velocity. Immediately after the figure axis is released, the initial motion of the top is always to fall under the influence of gravity. But as it falls, the resultant torque around the axis of fall causes the top to pick up a precession velocity, directly proportional to the extent of its fall, which starts the figure axis moving sideways about the vertical. The initial fall results in a periodic notation of the figure axis in addition to the precession. As the top is spun faster and faster, the extent of the nutation decrease rapidly, although the frequency of nutation increases, while at the same time the precession about the vertical becomes slower. In practice, for a sufficiently fast top the nutation is damped out by the friction at the pivot and becomes unobservable. The top then *appears* to precess uniformly about the vertical axis. Because the precession is regular only in appearance, Klein and Sommerfeld have dubbed it a *psendoregular* precession. In most of the elementary discussions of precession, the phenomenon of nutation is neglected. As a consequence, such derivations seem to lead to the paradoxical conclusion that upon release the top *immediately* begins to precess uniformly, a motion that is *normal* to the forces of gravity that are the ultimate cause of the precession. One discussion of pseudoregular precession serves to resolve the paradox; the precession builds up continuously from rest without any infinite accelerations, and the initial tendency of the top in to move in the direction of the forces of gravity."

Goldstein, *Classical Mechanics*, pg. 218

Força central Considerem el cas d'una partícula m movent-se en un potencial central $V(r)$, com abans podem considerar que el moviment es produeix en un pla i denotar la posició de la partícula en coordenades polars

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

El lagrangià del sistema serà $\mathcal{L} = T - V$ on $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2]$ per tant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] - V(r) \tag{8.35}$$

Aplicant les equacions de Lagrange (8.11) a cada $q_j = \{r, \theta\}$ obtenim

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + F(r) \tag{8.36}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{8.37}$$

equivalent a les equacions (3.9) i (3.10) trobades anteriorment.

També podem resoldre el problema fent ús de les equacions de Hamilton, on H ve donat per (8.22). Primer trobem p_j per a cada q_j

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Així, reescrivim el lagrangià(8.35) en funció de p_r i p_θ:

$$\mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - V(r)$$

i trobem H en funció de r, θ, p_r i p_θ:

$$\mathrm{H} = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

Per últim, apliquem les equacions de Hamilton (8.23) per tal de trobar un sistema de 4 EDOs lineal de primer ordre equivalent amb el trobat fent servir lagrange

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + F(r) \tag{8.38}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad ; \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta} = 0 \tag{8.39}$$

8.6 Canvis de sistema de referencia

Ja hem vist que el lagrangià es preserva sota canvis de coordenades, és a dir, $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}; t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j; t)$ on $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_j; t)$ si $\det[\partial(\boldsymbol{r})/\partial(q_j)] \neq 0$. En general, donat un sistema de coordenades x_i, el lagrangià en el nou sistema q_j vindrà donat per $\mathcal{L} = T - V$ on, en aquest cas general, l'energia cinètica la trobarem a partir de (8.18) fent servir que $\dot{x}_i$ ve determinat per (8.4).

Coordenades polars Suposem una partícula que es mou respecte un SR fix amb posició (x, y), volem expressar la posició d'aquesta partícula en coordenades polars (r, θ) respecte un nou SR' en rotació respecte el primer amb velocitat angular ω contant, sense la presencia de potencial.

Sabem que en SR fix $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, expressem (x, y) com a funcions de (r, θ):

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta + \omega t) \\ y = r\sin(\theta + \omega t) \end{cases}$$

on el terme ωt es deu a que SR' gira respecte SR. Un cop obtinguts aquests resultats, calculem $\dot{x}$ i $\dot{y}$ tenint en compte la dependència en (r, θ) i la dependencia explicita en el temps

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos(\theta + \omega t) - r\sin(\theta + \omega t)\dot{\theta} - r\omega\sin(\theta + \omega t) \\ \dot{y} = \dot{r}\sin(\theta + \omega t) + r\cos(\theta + \omega t)\dot{\theta} + r\omega\cos(\theta + \omega t) \end{cases}$$

Substituint a l'energia cinètica trobem

$$T = \frac{1}{2}m[\overbrace{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}^{T_2} + \underbrace{2r^2\omega\dot{\theta}}_{T_1} + \overbrace{(r\omega)^2}^{T_0}]$$

Degut a que no hi ha potencial $\mathcal{L} = T$ (tenim un lagrangià pòbre) i apliquem les equacions de lagrange (8.11) per r i θ:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - 2m\omega r\dot{\theta} - m\omega^2 r = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) + 2\omega r\dot{r} = 0$$

Resultats que es relacionen fàcilment amb els trobats a (5.6), on els termes a la dreta de la primera igualtat corresponen a la força de coriol·lis i a la força centrípeta respectivament.

Si volguéssim afegir un potencial $V(q_j; t) = V(x(r, \theta), y(r, \theta); t)$ només hauríem d'afegir a la dreta de les igualtats anteriors $Q_r = \partial_r F$ i $Q_\theta = r\partial_\theta F$ respectivament (eq. (8.10)).

Rotació en 3D Tal com hem fet a la secció 5 considerem el sistema de la figura 2 on el sistema Σ rota respecte Σ' amb velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ sense translació ($O' = O$). Per la relació (5.3) podem escriure $\dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (\dot{x} - \omega y)\boldsymbol{e}_x + (\dot{y} + \omega x)\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$ si considerem $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$. Calculem el lagrangià si considerem la presencia d'un potencial $V = V(x, y, z; t)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}'^2 - V = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2] - V$$

i aplicant les equacions de lagrange (8.11) trobem

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x + m\dot{\omega}y - \partial_x V \\ m\ddot{x} &= -2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y - m\dot{\omega}x - \partial_x V \\ m\ddot{z} &= -\partial_z V \end{aligned}$$

que es pot escriure en forma més compacta, per aquest cas $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$, com

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{8.40}$$

Rotació + Translació Considerem el cas més general en que el sistema Σ es desplaça i rota respecte Σ'* com a la figura 1. Com hem vist a l'apartat 6.1 podem expressar la posició d'una partícula com $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{b} + R\boldsymbol{r}$ on $\boldsymbol{b}$ és el vector que uneix els dos SR, $\boldsymbol{r}$ la posició de la partícula respecte el SR Σ mòbil i $\boldsymbol{r}'$ la posició de la partícula respecte el SR Σ' fix. També hem trobat que podem expressar la velocitat a Σ com

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{R}^t R\boldsymbol{r} + R^t\dot{\boldsymbol{r}}' - R^t\dot{\boldsymbol{b}} = \dot{R}^t R\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM} \tag{8.41}$$

els últims dos termes els interpretem com la velocitat de la partícula respecte Σ' i la velocitat del SR Σ respecte Σ' respectivament. Veiem ara com podem interpretat el terme $\dot{R}^t R\boldsymbol{r}$, tenim per definició de matriu de rotació R que $R^t R = \mathbb{I}_3$, derivant aquesta igualtat tenim $\dot{R}^t R + R^t\dot{R} = \hat{O}_3$ que en forma indicial es pot escriure $[\dot{R}^t R]_{ij} = -[R^t\dot{R}]_{ij} = -[(R^t\dot{R})^t]_{ji} = -[\dot{R}^t R]_{ji}$. Aquesta última igualtat ens indica que la matriu $\dot{R}^t R$ es antisimètrica amb 0's a la diagonal com la matriu de canvi de base definida a (5.2). Per tant, de la mateixa manera que s'ha fet abans, definim el vector $\boldsymbol{\omega}$ com

$$[\dot{R}^t R]_{ij} = -[R^t\dot{R}]_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k \tag{8.42}$$

Amb aquesta definició és fàcil veure que el producte $\dot{R}^t R\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ($[\dot{R}^t R\boldsymbol{r}]_i = [\dot{R}^t R]_{ij} r_j = \epsilon_{ijk} r_j \omega_k = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$) per tant podem escriure $\dot{\boldsymbol{r}}$ com

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM} \tag{8.43}$$

Derivant respecte el temps aquesta última expressió trobem

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{v}}' - \dot{\boldsymbol{v}}_{CM}$$

On els dos últims termes els podem trobar sabent que $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM} = R^t(\dot{\boldsymbol{r}}' - \dot{\boldsymbol{b}})$, així

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R^t(\dot{\boldsymbol{r}}' - \dot{\boldsymbol{b}})] \\ &= \dot{R}^t(\dot{\boldsymbol{r}}' - \dot{\boldsymbol{b}}) + R^t(\ddot{\boldsymbol{r}}' - \ddot{\boldsymbol{b}}) \\ &= \dot{R}^t R(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM}) + \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}_{CM} \\ &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_{CM}) + \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}_{CM} \\ &\overset{(8.43)}{=} -\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}_{CM} \end{aligned}$$

Substituint a $\ddot{\boldsymbol{r}}$ i reordenant els termes obtenim l'equació per l'acceleració en el SR Σ no inercial

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}_{CM} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \tag{8.44}$$

Equació idèntica a la trobada a (5.9) pel canvi de SR, cada un d'aquest termes correspon:

*Es important recordar que no importa quin SR considerem com a fix i quin com a mòbil, les equacions resultants son les mateixes menys un canvi de signe.

$\boldsymbol{a}$ Acceleració de la partícula en el SR no inercial Σ.

$\boldsymbol{a}'$ Acceleració de la partícula en el SR inercial Σ'.

$\boldsymbol{a}_{CM}$ Acceleració del centre de masses Σ respecte el SR Σ', si Σ no es trasllada respecte Σ' llavors aquest terme és identicament 0.

$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ Acceleració de coriolis, deguda al moviment de la partícula en el SR Σ.

$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ Acceleració centrípeta, dirigida cap a fora respecte el centre de rotació.

$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ Terme que apareix degut a l'acceleració angular del SR en rotació, només en els casos en que $\boldsymbol{\omega}$ no és constant.

Rotació al voltant de $\boldsymbol{n}$ Considerem ara una rotació respecte un vector unitari $\boldsymbol{n}$ fix, de la mateixa manera que abans tindre $\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}$ on ara $R = R(\theta\boldsymbol{n})$, llavors en forma indicial tenim $r_i' = R_{ij}r_j$ i la seva derivada temporal:

$$\dot{r}_i' = \dot{R}_{ij}r_j + R_{ij}\dot{r}_j = \dot{R}_{ij}R_{lj}x_l' + R_{ij}\dot{x}_j \overset{(8.42)}{=} \epsilon_{ikl}\omega_k x_l' + R_{ij}\dot{x}_j$$

D'altra banda, si tenim com a vectors de la base $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}_j'\}$ i $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j\}$ (SR fix i mobil respectivament) el vector posició respecte les dues bases es pot escriure com $\boldsymbol{r} = r_i'\boldsymbol{e}_i' = r_j\boldsymbol{e}_j$ i com que $r_i' = R_{ij}r_j \Rightarrow \boldsymbol{r} = R_{ij}r_j\boldsymbol{e}_i'$. Així, multiplicant per $\boldsymbol{e}_i'$ a l'equació anterior i sumant per $i = 1, \dots, 3$ obtenim la relació

$$\sum_i \dot{r}_i'\boldsymbol{e}_i' = \sum_i \epsilon_{ikl}\omega_k R_{lj}x_j\boldsymbol{e}_i' + \sum_i R_{ij}\dot{x}_j\boldsymbol{e}_i'$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{8.45}$$

I tornem a obtenir la famosa formula de canvi de SR (5.3).

Per completitud, podem trobar la relació entre R, $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{n}$. Comencem descomposant el vector $\boldsymbol{r}^*$ rotat en un angle ϕ en els eixos de coordenades $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$ i $-\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})$, sent $\boldsymbol{r}$ el vector original, obtenint:

$$\boldsymbol{r}^* = R(\phi\boldsymbol{n})\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\cos\phi + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\sin\phi \tag{8.46}$$

i tenint en compte que $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})$ podem escriure l'equació anterior com

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}\cos\phi + (1-\cos\phi)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{r})\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\sin\phi$$

o en forma indicial amb la relació $r_i = \delta_{ij}r_j$:

$$r_i^* = R_{ij}r_j = [\delta_{ij}\cos\phi + (1-\cos\phi)n_in_j + \epsilon_{ikj}n_k\sin\phi]r_j \tag{8.47}$$

Un cop trobem R_{ij} apliquem la formula (8.42) sabent que trivialment $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{n}$, per tant calculem $\dot{R}^t$ i fem el producte amb R:

$$\begin{aligned}[\dot{R}^tR]_{ij} = \dot{R}_{li}R_{lj} &= \dot{\phi}[-\delta_{li}\sin\phi + n_in_l\sin\phi + \epsilon_{lki}n_k]\times\\ &\qquad[\delta_{lj}\cos\phi + (1-\cos\phi)n_ln_j + \epsilon_{lmj}\epsilon_l]\\ &= \cdots = \dot{\phi}\epsilon_{ijk}n_k = \epsilon_{ijk}\omega_k\end{aligned}$$

Com veieu tornem a arribar a lo mateix lo qualo no fa més que confirmar que estem sempre donant voltes a lo mateix.

I pum lagrangià I per fi, en aquest apartat, trobarem la ja odiada equació de canvi de SR (5.9) utilitzant les equacions de lagrange. Inicialment considerem que el sistema no es troba sota la presencia d'un potencial per tant $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2$ on $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \omega\times\boldsymbol{r}$ només queda substituir a l'energia cinètica i anar desenvolupant per trobar

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \omega\times\boldsymbol{r}\right]_j^2 \tag{8.48}$$

on hi ha un sumatori implícit de $j = 1, 2, 3$. A continuació calculem els diferents termes de les equacions de lagrange tenint en compte que $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ són funcions de q_j, $\dot{q}_j$ i t per tant $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}r_i} = 0$ i $\frac{\partial r_j}{\partial r_i} = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial r_i} &= m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right]_j \left[\frac{\partial}{\partial r_i}\epsilon_{jkl}\omega_k r_l\right] = m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right]_j \epsilon_{jki}\omega_k = -m\epsilon_{ikj}\omega_k\dot{r}_j + \epsilon_{jlm}\epsilon_{jki}\omega_l r_m\omega_k \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} &= m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right]_j \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{r}_i} = m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right]_j \delta_{ij} = m\left[\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right]_i = m\dot{r}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j r_k \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} &= m\ddot{r}_i + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r})_i + m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})_i \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial T}{\partial r_i} &= m\ddot{r}_i + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r})_i + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})_i + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_i = 0
\end{aligned}$$

Trobem la relació entre SR mobils quan no hi ha forces externes. Si per últim considerem $V = V(\boldsymbol{r}; t)$ llavors identificant $\partial_i V = -F_i$ obtenim

$$m\ddot{r}_i + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r})_i + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})_i + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_i = \boldsymbol{F}_i \tag{8.49}$$

9 Transformacions canòniques

Anteriorment, a l'apartat 8.3 hem definit el concepte d'Hamiltonià juntament amb les equacions canòniques del moviment (8.23) aquí volem discutir en més profunditat el significat d'aquesta nova funció. Cal notar que l'Hamiltonià conté la mateixa informació que el Lagrangià, és més, H no és res més que la transformada de Legendre en les $\dot{q}$'s del Lagrangià

$$H(q_j; p_j; t) = -\mathrm{L}[\mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j; t)] = \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}(q_j; \dot{q}_j; t) \tag{9.1}$$

on p_j és el moment generalitzat introduït a l'equació (8.14).

Aquesta reformulació és introduir-nos una nova eina, més poderosa, de trobar les equacions del moviment i més versàtil en els diferents camps de la física. Un dels avantatges de la formulació Hamiltoniana és que tracta les q's i les p's com iguals, sense distincions entre coordenades espaials o moments (pel fet de ser variables independents) i com veurem més endavant són inclús intercanviables fent que l'única diferencia entre elles sigui purament de nomenclatura.

Un cop trobat l'Hamiltonià del sistema el següent pas és resoldre les equacions del moviment, un pas altament no trivial segons el sistema, tot i això sabem que segons el conjunt de coordenades que utilitzem se'ns pot simplificar la feina enormement: és el cas per exemple de resoldre el problema de Kepler en coordenades cartesianes en comptes de esfèriques. En aquest exemple, si expressem H en coordenades cartesianes trobem que cap d'aquestes és cíclica ($\dot{p}_j = 0$) mentre que en coordenades esfèriques si que trobem una coordenada cíclica p_ϕ. Veien això, que passaria si poguéssim trobar sempre un conjunt de coordenades on totes les variables fossin cícliques?

Doncs bé, en aquest cas totes les $\dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = \alpha$ i per tant $\mathrm{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$. Les equacions de moviment es redueixen a $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = \omega_j = ct. \Rightarrow q_j = \omega_j t + \beta_j$, solucions senzilles de trobar.

L'objectiu de les transformacions canòniques és trobar un procediment per tal de arribar a un altre conjunt de coordenades (Q, P) a partir de l'original (q, p) de tal manera que les equacions de moviment a resoldre en aquest nou sistema siguin de la forma més senzilla possible. Normalment això equivaldrà en trobar un conjunt on totes siguin cícliques, tot i que això no sempre és possible i ens haurem de conformar en trobar el que tingui el major nombre d'elles.

Definim les *point transformations* com les equacions que ens permeten expressar (Q, P) en funció de (q, p) (canvien l'espai de fases):

$$Q_i = Q_i(q_j; p_j; t) \qquad P_i = P_i(q_j; p_j; t) \tag{9.2}$$

En cas que no depenguin explícitament del temps s'anomenarà *transformació canònica restrictiva.*

Evidentment, aquestes noves coordenades han de ser canòniques per tant ha d'existir una funció $\mathrm{K}(Q_i; P_i; t)$ (malanomenada Kamiltonià) tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial P_i} \qquad ; \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial Q_i} \tag{9.3}$$

A més a més, tenim la condició (o la impossem) que aquesta transformació ha de ser valida per a totes sistema amb el mateix nombre de graus de llibertat (tant per l'oscil·lador harmònic com per a Kepler) i per a tota condició inicial de l'Hamiltonià. Per tant, les noves variables han de complir el principi de Hamilton (amb la nova funció K)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - \mathrm{K}) dt = 0 \tag{9.4}$$

però per ser (q, p) variables canòniques també han de complir aquest mateix principi, així

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_j \dot{q}_j - \mathrm{H}) dt = 0 \tag{9.5}$$

És fàcil veure que la solució més general possible per tal de relacionar les últimés equacions és

$$\lambda(p_j \dot{q}_j - \mathrm{H}(q_j; p_j; t)) = P_i \dot{Q}_i - \mathrm{K}(Q_i; P_i; t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q_j; p_j; Q_i; P_i; t) \tag{9.6}$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ i $F(q_j; p_j; Q_i; P_i; t) \in \mathcal{C}^2_{[t_1, t_2]}$. Estudiem aquesta relació:

- El factor λ ens dona més generalitat tot i que sempre podem considerar $\lambda = 1$, això és possible perquè sempre podrem realitzar una transformació canònica a (Q', P') després de la inicial (Q, P) de la forma $Q' = \alpha Q$ i $P' = \beta P$, anomenada transformació d'escala. Substituint a (9.6) es troba que $\lambda = \alpha\beta$ amb $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ i per tant les equacions de moviment no es veuen afectades.

- El terme $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ és una constant d'integració que prové del fet que la variació de qualsevol funció de (q, p) i, en conseqüència de (Q, P), la seva variació serà 0 en els extrems. Aquesta funció, anomenada *funció generadora*, és de vital importància ja que serveix de pont entre els dos espais de fases i es la que finalment ens acabarà determinant la nova forma del Kamiltonià.

  En la forma més general pot dependre de $(q_j; p_j; Q_i; P_i; t)$ però no te perquè ser sempre així, per exemple, escollim $F(q_j; Q_i)$ i substituïm a (9.6)

$$\lambda(p_j\dot{q}_j - \mathrm{H}(q_j; p_j; t)) = P_i\dot{Q}_i - \mathrm{K}(Q_i; P_i; t) + \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

  Si els dos termes han de ser iguals, pel fet de ser tot variables independents, els coeficient de $\dot{q}_j$ i $\dot{Q}_i$ s'han d'anul·lar per separat obtenint així les equacions de la transformació

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad ; \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad ; \quad \mathrm{K} = \mathrm{H}(Q_i; P_i; t) + \frac{\partial}{\partial t}F(Q_i; P_i; t)$$

  Escollint el cas particular $F_1(q_j; Q_i) = q_jQ_i$ tenim, fent cas al resultat anterior, $p_j = Q_i$ i $P_i = -q_j$ (notese els sumatoris implícits jeje) i $\mathrm{K} = \mathrm{H}$. És a dir, hem trobat una funció generadora de la transformació que el que fa és intercanviar els moments i les coordenades fent notar el fet que ja apuntàvem, que la diferencia entre elles en la formulació Hamiltoniana és només de nomenclatura (però ambdós dos es necessiten per descriure el sistema). Això també succeeix si escollim $F = q_jp_j - Q_iP_i - F_4(p_j; P_i)^*$ on $F_4(p_j; P_i) = p_jP_i \Rightarrow Q_i = p_j$ i $q_j = -P_i$.

  En canvi, si escollíssim funcions de l'estil $F_2(q_j; P_i; t)$ o $F_3(p_j; Q_i; t)$ el que obtindríem com a resultat seria que el caràcter de les noves coordenades no variaria (de moment a moment i d'espai a espai, llevat d'un canvi de signe). D'aquestes transformacions se les anomena transformacions identitat.

Transformació canònica restringida Considerem el cas en que la transformació no depèn explícitament del temps, així les equacions de transformació es poden escriure com

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_j; p_j) \\ P_i &= P_i(q_j; p_j) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Al no dependre explícitament del temps tenim que el nou hamiltonià és igual a l'original, $\mathrm{H} = \mathrm{K}$. Calculem $\dot{Q}_i$ i $\dot{P}_i$;

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j \overset{(8.23)}{=} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{Q_i, \mathrm{H}\} \tag{9.8}$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j \overset{(8.23)}{=} \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{P_i, \mathrm{H}\} \tag{9.9}$$

tal com havíem trobat a (8.25). D'altra banda, degut a que la transformació (9.7) és invertible, podem expressar H en termes de les noves variables $(Q_i; P_i)$ com $\mathrm{H}(Q_i; P_i) = \mathrm{H}(q_j(Q_i; P_i), p_j(Q_i; P_i))$, avaluem la derivada parcial respecte P_i:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \tag{9.10}$$

*S'escolleix la funció generadora d'aquesta manera per tal d'obtenir sempre que $\mathrm{K} = \mathrm{H} + \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t}$.

per les equacions de Hamilton en les noves variables sabem que s'ha de complir que $\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial P_i}$ llavors comparant (9.8) i (9.10) obtenim les condicions

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \qquad , \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \tag{9.11}$$

fent el mateix procediment amb $\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$ s'obté

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \qquad , \qquad \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \tag{9.12}$$

El conjunt d'equacions anterior són les *condicions directes* que ha de complir una transformació canònica restringida.

Exemple (Oscil·lador harmònic)

9.1 Sympletic approach

Continuem aquí fent ús de la notació introduïda anteriorment a l'apartat 8.3, recordem que definíem un vector $\boldsymbol{\eta} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^t$, així les equacions de hamilton s'expressaven com

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathcal{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta}, \mathrm{H}\} \qquad , \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \tag{9.13}$$

Igualment, definim un vector $\boldsymbol{\zeta} = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^t$ amb les noves variables, fàcilment avaluem la derivada temporal d'una de les seves components a partir de (9.8) per

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i \tag{9.14}$$

que en notació matricial escrivim com

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{M}\dot{\boldsymbol{\eta}} \qquad , \qquad \mathcal{M}_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \tag{9.15}$$

on $\mathcal{M}$ és la matriu Jacobiana de la transformació. Substituint el valor de $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ tenim

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{M}\mathcal{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{9.16}$$

Per la transformació inversa, H pot ser considerat com a funció de ζ_i i llavors

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \leftrightarrow \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathcal{M}^t\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \tag{9.17}$$

així l'equació canònica del moviment en les noves variables és

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^t\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \tag{9.18}$$

Però això no acaba aquí ja que sabem que en les noves variables (en una transformació canònica restringida) també s'ha de complir (9.13) però per $\boldsymbol{\zeta}$, comparant amb (9.18) tenim la condició

$$\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^t = \mathcal{J} \tag{9.19}$$

multiplicant per $(\mathcal{M}^t)^{-1}$ ambdós dos costats obtindríem $\mathcal{M}\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{M}^t)^{-1}$ que en la notació tradicional equival a les condicions trobades anteriorment per una transformació canònica restringida*.

És important notar que, tot i que la derivació ha estat feta sense considerar el temps com a paràmetre, l'equació (9.19) continua sent una condició necessària i suficient per una transformació canònica depengui o no explícitament del temps. De les matrius $\mathcal{M}$ que compleixen aquesta condició se les anomena *matrius simplètciques.*

*Per a una transformació d'escala on $\mathrm{K} = \lambda\mathrm{H}$ tindríem $\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^t = \lambda\mathcal{J}$

Propietat Les transformacions canòniques tenen estructura de grup abelià ja que compleixen les següents propietats

1. La transformació identitat és canònica.
2. Si una transformació és canònica també ho és la seva inversa.
3. Dues transformacions canòniques successives (producte) defineixen una nova transformació que també és canònica.
4. El producte de transformacions és associatiu.

9.2 Equacions de moviment

És útil per a la següent derivació recordar el concepte de parèntesis de Poisson definits com

$$\{u,v\}_{q,p} = \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}\right] \tag{8.24}$$

on u, v són funcions de les variables q_i i p_i. En forma sympletica els podem escriure com

$$\{u,v\}_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^t \mathcal{J} \left(\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right) \tag{9.20}$$

Dos de les propietats dels parèntesis de Poisson és que es conserven sota coordenades canòniques, és a dir, si $\boldsymbol{\zeta}$ és una transformació canònica de $\boldsymbol{\eta}$ llavors es compleix que

$$\{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^t \mathcal{J} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right) = \mathcal{M}^t\mathcal{J}\mathcal{M} \overset{(9.19)}{=} \mathcal{J} = \{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}\}_{\boldsymbol{\zeta}}$$

així que podem ometre el subscript $\{\}_a$ ja que en tots els sistemes de coordenades obtindrem el mateix resultat.

Anem ara si a deduir les equacions de moviment, suposant una funció $u(q_i;p_j;t)$ de les coordenades canòniques busquem la seva derivada temporal

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

on hem fet servir les equacions de Hamilton (8.23), comparant el terme de la dreta amb la definició del parèntesi de Poisson trobem que la variació de la funció u en el temps ve determinada per

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \{u,\mathrm{H}\} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{9.21}$$

Per al cas concret on $u = q_i$ o $u = p_i$ trobaríem exactament les equacions de Hamilton (8.23), que en notació sympletica es redueixen a

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta},\mathrm{H}\} \tag{9.22}$$

ja que les coordenades $\boldsymbol{\eta}$ no depenen explicitament del temps.

Transformacions infinitesimals i generadors En aquest cas, la transformada que realitzarem serà del tipus $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}$ on $\delta\boldsymbol{\eta} \to 0$ representa un petit desplaçament respecte el valor $\boldsymbol{\eta}$. La funció generadora d'aquesta transformació la podríem escriure com $F_2 = q_iP_i + \epsilon G(q_i;P_j;t)$ amb $\epsilon \to 0$ i G serà la funció generadora de transformacions canòniques infinitessimals. Seguint amb el formulisme derivat anteriorment tenim

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \Rightarrow \delta p_j = -\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \\ Q_j &= \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_j} \Rightarrow \delta q_j \approx \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_j} \end{aligned}$$

on per a l'última igualtat hem considerat que $P_j \approx p_j$ ja que només difereixen per un infinitèsim. Tornant a la notació sympletica, veient els resultats anterior, podem veure que el desplaçament infinitesimal δ pren la forma

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\eta}} \tag{9.23}$$

A més, és fàcil demostrar que qualsevol transformació infinitesimal satisfà la condició sympletica (9.19):

Demostració. Per definició, tenim que

$$\mathcal{M} = \frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial\boldsymbol{\eta}} = 1 + \frac{\partial\delta\boldsymbol{\eta}}{\partial\boldsymbol{\eta}} = 1 + \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}$$

per ser $\mathcal{J}$ antisimètrica, la matriu $\mathcal{M}$ transposada diferirà només en un signe negatiu. Llavors, calculem el producte $\mathcal{M}^t\mathcal{J}\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^t\mathcal{J}\mathcal{M} = \left(1 - \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\right)\mathcal{J}\left(1 + \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\right) = \mathcal{J} + \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\mathcal{J} - \epsilon\mathcal{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\mathcal{J} = \mathcal{J}$$

verificant l'eq. (9.19). □

Tornant a la transformació infinitesimal, per l'eq. (9.20) prenent $u = \boldsymbol{\eta}$ i $v = G$ es segueix que

$$\{\boldsymbol{\eta}, G\} = \mathcal{J}\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\eta}} \Longrightarrow \delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon\{\boldsymbol{\eta}, G\} \tag{9.24}$$

Un exemple bàsic per veure la gran importància que té aquest resultat és considerar $G = H$ i $\epsilon \to dt$ (spoiler de per on va la cosa) llavors

$$\delta\boldsymbol{\eta} = dt\{\boldsymbol{\eta}, H\} = dt\dot{\boldsymbol{\eta}} = d\boldsymbol{\eta} \tag{9.25}$$

"These equations state that the transformation changes the coordinates and momenta at the time t to the values they have at the time $t + dt$. Thus, the motion of the system in a time interval dt can be described by an infinitesimal contact transformation generated by the Hamiltonian. Correspondingly, the system motion in a finite time interval from t_0 to t is represented by a succession of infinitesimal contact transformations, which, as we have seen, is equivalent to a single finite canonical transformation. Thus, the values of q_i and p_j at any time t can be obtained from their initial values by a canonical transformation that is a continuous function of time. According to this view, the motion of a mechanical system corresponds to the continuous evolution or unfolding of a canonical transformation. In a very literal sense, the Hamiltonian is the generator of the system motion with time."

Goldstein, *Classical mechanics*, pag. 401.

La importància que tenen els generadors ve donada pel següent teorema que ens relaciona les simetries del sistema amb les seves quantitats conservades:

Teorema 9.1. *Les constants de moviment són les funcions generadors de transformacions infinitesimals que deixen l'Hamiltonià invariant.*

Tot i que no en farem la demostració si que podem fer una breu descripció del seu significat. Si tenim un sistema que es mou d'A a B en general el valor de l'Hamiltonià variarà, a no ser que el sistema presenti una simetria respecte aquest canvi (translació, rotació...) llavors el valor de l'Hamiltonià serà el mateix pels dos estats. Per exemple, si H presenta simetria esfèrica llavors el valor de l'Hamiltonià no variarà sota qualsevol rotació que li fem al sistema. Aquesta simetria del sistema implica una constant de moviment (que ja sabem que serà el moment angular $\boldsymbol{L}$ per rotacions).

Per exemple, considerem $G(q_i; p_j) = p_k$ (translació de la coordenada p_k) si H és cíclic respecte q_k, és a dir, no depèn d'aquesta coordenada, llavors de l'eq. (9.24) es segueix que el desplaçament de les coordenades serà $\delta q_i = \epsilon\delta_{ik}$ i $\delta p_j = 0$ tal com esperàvem obtenir per una translació.

Pot ser un exemple més interessant és el de rotacions, considerarem per simplicitat una rotació infinitesimal d'un angle $d\theta$ al voltant de z. En coordenades cartesianes, les equacions de transformació són $\delta x_i = -y_i d\theta$ i $\delta y_i = x_i d\theta$ per les coordenades i similarment $\delta p_i^x = -p_i^y d\theta$ i $\delta p_i^y = p_i^x d\theta$ pels moments (on el desplaçament respecte z és nul). És facil comprovar que $G = x_i p_i^y - y_i p_i^x$ (fer-ho a partir de G per l'eq. (9.24)) però aquesta és simplement la coordenada z de $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ llavors $G = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{e}_z$. Per tant, com que em agafat l'eix z arbitràriament, el generador de rotacions al voltant del vector $\boldsymbol{n}$ vindrà donat per

$$G_{rot} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n} \tag{9.26}$$

És important notar que el moment lineal canònic $\boldsymbol{p}_i$ no te perquè coincidir amb el tradicional moment lineal mecànic ($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$) i per tant el moment angular canònic tampoc té perquè coincidir amb el moment angular mecànic tot i que es defineixin de la mateixa manera i els dos siguin els generadors de rotacions.

Tot i que l'eq. (9.24) ens genera una translació discreta de les coordenades, podem expressar $\epsilon \to d\alpha$ on ara α és un paràmetre continu (es pot pensar com el temps) i les coordenades com a funcions d'aquest parametre $\boldsymbol{\eta}(\alpha)$ llavors podem escriure l'equació com

$$\delta\boldsymbol{\eta} = d\alpha\{\boldsymbol{\eta}, G\} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}\alpha} = \{\boldsymbol{\eta}, G\} \tag{9.27}$$

integrant l'EDO trobarem $\boldsymbol{\eta}(\alpha)$, és a dir, l'efecte de la transformació canònica finita a les coordenades. Per a trobar una solució aproximada farem una explanació de Taylor al voltant de les condicions inicials $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0$ tenim

$$\boldsymbol{\eta}(\alpha) = \boldsymbol{\eta}(0) + \alpha\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}\alpha^2} + \cdots$$

el valor de la 1a derivada el coneixem (eq. (9.27)), el valor de la 2a derivada consistirà en fer el parèntesis amb el parèntesis $\{\{\boldsymbol{\eta}, G\}, G\}$ i així successivament

$$\boldsymbol{\eta}(\alpha) = \boldsymbol{\eta}(0) + \alpha\{\boldsymbol{\eta}, G\} + \frac{\alpha^2}{2}\{\{\boldsymbol{\eta}, G\}, G\} + \cdots = e^{\alpha\{-,G\}}\boldsymbol{\eta} \tag{9.28}$$

on el n-èssim coeficient de $e^{\alpha\{-,G\}}$ simplement indica aplicar el parèntesis successivament n cops per la dreta.

Per exemple, considerem l'evolució temporal d'una partícula sota l'acció de la graveta on $\mathrm{H} = p^2/2m - max$. El generador de transformacions temporals és $G = \mathrm{H}$, si la partícula es troba a $t = 0$ a $x = x_0$ llavors $\{x, \mathrm{H}\} = p_0/2$ i $\{\{x, \mathrm{H}\}, \mathrm{H}\} = \{p/m, \mathrm{H}\} = a$ el valor d'aquest parèntesi és constant per tant els parèntesis d'ordre superiors s'anul·laran. Substituint aquests resultats a l'eq. (9.28) trobem

$$x = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}at^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

l'equació d'un moviment rectilini uniformement accelerat!!! Com diu el Goldstein, aquest mètode ens porta al resultat correcte però és un *tour de force* que ens podríem estalviar pels casos senzills.

A Teorema de Bertrand

El teorema de Bertrand nos dice que las únicas fuerzas centrales que tienen la propiedad de que todas sus orbitas acotadas son cerradas son

$$F(r) = -kr \qquad F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

Veamos su demostración:

Para una órbita casi-circular, eso es despreciando los terminos de orden dos o superior en (3.18), tenemos que las perturbaciones respecto el radio inicial son de la forma

$$\xi(\theta) = A\cos(\alpha\theta) \tag{A.1}$$

donde hemos escogido convenientemente que $\theta_0 = 0$ sea un minimo de la función.

Está claro que α tiene que ser racional para que se puedan producir orbitas cerradas, así si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ después de q revoluciones la orbita volverá al estado inicial. Por otro lado, sabemos que α viene dada por $\alpha^2 = 1 - \Psi'(u_0)$ donde $\Psi'(u_0)$ es una función continua *real* de u_0 pero como α debe ser racional, esta no puede depender de Ψ'_0 por ser real, por lo tanto, α debe ser constante (independientemente de las condiciones iniciales). Si no lo fuera, en algún momento pasaria de α_1 a α_2 (ambos racionales y contiguos) para algún u_1 y u_2 ($\in \mathbb{R}$), por el teorema del valor medio existe un $u_m \in (u_1, u_2)$ tal que $\alpha(u_m) \in (\alpha_1, \alpha_2)$ pero como por hipotesis α_1 y α_2 son contiguos entonces, por continuidad, la unica posibilidad es que $\alpha(u_m) \in \mathbb{R}$ cosa que entra en contradicción con lo que hemos dicho, por lo tanto α tiene que ser **racional y constante**.

A partir de la relación $1 - \alpha^2 = \Psi'$ podemos encontrar la ecuación general para la fuerza:

$$1 - \alpha^2 = -2 - \frac{r}{F(r)}\frac{dF(r)}{dr} \to (3 - \alpha^2)\frac{dr}{r} = -\frac{dF(r)}{F(r)}$$

Integrando a ambos lados obtenemos

$$F(r) = \frac{-k}{r^{3-\alpha^2}} \tag{A.2}$$

A continuación aplicamos el metodo de Poincaré-Lindstedt para esta fuerza:

$$\Psi(u) = \frac{k}{ml^2}u^{1-\alpha^2}$$

Sabemos que $u_0 = \Psi(u_0)$, por lo tanto si solucionamos la ecuación anterior encontramos

$$u_0 = \frac{k}{ml^2}u_0^{1-\alpha^2} \to \frac{k}{ml^2} = u_0^{\alpha^2}$$

de esta manera podemos reescribir Ψ en términos de u y u_0:

$$\Psi(u) = u_0\left(\frac{u}{u_0}\right)^{1-\alpha^2}$$

Calculamos sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= \frac{1-\alpha^2}{u^{\alpha^2}}u_0^{\alpha^2}\Big|_{u_0} = 1 - \alpha^2 \\
\Psi''_0 &= -\alpha^2(1-\alpha^2)\frac{u_0^{\alpha^2}}{u^{1+\alpha^2}}\Big|_{u_0} = -\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{u_0} \\
\Psi'''_0 &= \alpha^2(1-\alpha^2)(1+\alpha^2)\frac{u_0^{\alpha^2}}{u^{2+\alpha^2}}\Big|_{u_0} = \frac{\alpha^2(1-\alpha^2)(1+\alpha^2)}{u_0^2}
\end{aligned}$$

Aplicamos el método de Poincaré-Lindstedt visto anteriormente, de donde obtenemos las soluciones de las ecuaciones diferenciales y utilizando los valores apropiados de β_1^2 i de β_2^2 para eliminar los términos seculares, sustituimos los valores de las derivadas, teniendo en cuenta que $\beta_1 = 0$ tenemos que:

$$\beta_2^2 = \frac{A^2}{12u_0^2} \cdot \alpha^2 \cdot (\alpha^2 - 1) \cdot (4 - \alpha^2)$$

Donde sustituyendo estos valores en la definicion de β nos da

$$\beta^2 = \alpha^2 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{12u_0}(\alpha^2 - 1)(4 - \alpha^2)\right)$$

eliminando el cuadrado tenemos que:

$$\beta = \alpha\sqrt{1 + \frac{A^2}{12u_0^2}(\alpha^2 - 1)(4 - \alpha^2)} \tag{A.3}$$

Ya hemos visto que α es racional, por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento que antes, para que la órbita sea cerrada β también tiene que ser racional para todo valor de u_0 y A por lo tanto esto solo será posible si $\beta_2 = 0$ lo que nos lleva a las soluciones $\alpha = \{0, 1, 2\}$. Sustituyendo estos valores para la fuerza (A.2) obtenemos

$$F(r) = -\frac{k}{r^3}$$
$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$
$$F(r) = -kr$$

La primera solución es trivial ya que nos lleva a una orbita perfectamente circular y las otras dos son la "*inverse-square law*" y la ley de Hooke.

Por lo tanto queda demostrado que estas son las únicas fuerzas en las que todas sus órbitas acotadas son cerradas y estables:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$
$$F(r) = -kr$$

■

B Deducció Pineda Style de la γ

L'objectiu es deduir el factor de canvi de sistema de referencia relativista γ per un cos que es mou amb velocitat v respecte un altre donat per l'equació (7.2) a la Pineda Style*.

Suposarem que ens trobem en un SR inercial Σ que anomenem SR de laboratori on fem col·lisionar inelasticament dues partícules, tenint en compte que la massa d'aquestes depèn del modul de la seva velocitat: $m = m(|\boldsymbol{v}|)$. Així, tenim una massa en el pla xy que es mou en el sentit de les y's positives amb velocitat u i massa $m(|u|)$, aquesta massa, en un cert instant de temps, col·lisions amb una altra massa quieta $v' = 0$ de massa $m(|u'|) = m(0)$. Un cop col·lisionen, les dues masses queden unides en una massa $M(|v|)$ que es mou també en la direcció de les y's positives amb velocitat v. Aplicant la conservació del moment lineal en la direcció y tenim

$$m(|u|)u + m(0)\cdot 0 = M(|v|)v \longrightarrow m(|u|)u = M(|v|)v \tag{B.1}$$

I ara ve la subtilesa del Pineda, farem moure tot el pla xy on es troben les partícules amb velocitat w cap a dalt (z positives). Ara les partícules portaran una velocitat $\tilde{u}, \tilde{u}'$ i $\tilde{v}$ que vindrà donada a partir de la formula d'addició de velocitats per a velocitats perpendiculars (7.3) on, per aquest cas particular, $v \to w$, $u'_x \to u_z = 0$, $u_y \to \tilde{u}_y$ i $u'_y \to u$, així

$$|\tilde{u}| = \sqrt{u^2\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) + w^2} \quad ; \quad |\tilde{u}'| = |w| \quad ; \quad |v| = \sqrt{v^2\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) + w^2}$$

Aplicant la conservació del moment lineal per a la component z obtenim

$$m(|\tilde{u}|)w + m(|\tilde{u}'|)w = M(|\tilde{v}|)w \to m\left(\sqrt{u^2\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) + w^2}\right) + m(|w|) = M\left(\sqrt{v^2\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) + w^2}\right)$$

I ara ve la sultildesa del Pineda i és fer, en l'equació anterior, $w = 0$, és a dir, parem de moure el pla xy cap a dalt així tenim la relació entre masses següent

$$m(|u|) + m(|0|) = M(|v|) \tag{B.2}$$

Substituint el valor trobat de $M(|v|)$ a l'equació (B.1) trobem

$$m(|u|)[u - v] = m(0)v \longrightarrow m(|u|) = m(0)\frac{v}{u - v} = m(0)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m(0) \tag{B.3}$$

I pum ja tenim la relació buscada entre la massa inercial m(0) i la massa en moviment que augmenta a mesura que la velocitat de la partícula s'aproxima a c.[†] ■

[*]Es important dir que aquesta deducció va ésser entesa 3 mesos després que fos preguntada a l'examen, estudiant per al de recuperació :-(.

[†]Hi ha un pas critic entre la segona i tercera igualat que es deixa com a homework al lector perquè bàsicament npi de com arribar, com a ajuda el PPR va dir que només és fer el algebra a partir de (7.3) pero allà tu, salut i bon estiu!

C Relativitat i electromagnetisme

Recordem que l'electromagnetisme es pot descriure completament a partir de les equacions de Maxwell

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{C.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{C.1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{C.1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{C.1d}$$

juntament amb la força de Lorentz que descriu el moviment d'una carrega q sotmesa a un camp electromagnètic

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{C.2}$$

Aquestes equacions són invariants en la formulació relativista, l'objectiu és escriure les equacions de Maxwell utilitzant una reformulació covariant que les faci clarament invariants sota transformacions de Lorentz. Abans de començar hem de fer una serie de definicions que ens seran utils a partir d'ara:

- Quadrivector potencial: $A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ on ϕ és el potencial escalar elèctric tal que $E = -\nabla\phi$ i $\boldsymbol{A}$ el potencial vector magnètic on $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

- Quadrivector càrrega-corrent: $J^\mu = (\rho c, \boldsymbol{J})$ on ρ és la densitat de càrrega lliure i $\boldsymbol{J}$ la densitat de corrent.

- Tensor de Faraday: aquest ens permetrà reescriure les eq. de Maxwell de 4 a només 2.

$$cF^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \qquad cF_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

  Notem que aquest és totalment antisimètric: $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

- Operador d'Alembertià: normalment es representa per $\Box$ i té per coordenades

$$\Box_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot \qquad ; \qquad \Box^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{C.4}$$

A partir només d'aquestes definicions ja podem deduir l'equació de continuïtat aplicat $\Box$ sobre el quadrivector càrrega-corrent imposant que aquest ha de ser nul:

$$\Box \cdot J = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{C.5}$$

Si fem el mateix amb el quadrivector potencial obtenim la condició de Lorentz

$$\Box \cdot A = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{C.6}$$

llavors cada una de les coordenades del potencial compleixen l'equació d'ones amb la corresponent densitat

$$\Box^2 A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = \mu_0 J^\mu \tag{C.7}$$

Passem ara a reescriure les equacions de Maxwell utilitzant el tensor de Faraday. Poc a poc i sense fer-se mal, passant a coordenades les equacions D.1 i per inspecció del tensor F es pot arribar a veure algún cop a la vida que aquestes quedaran com

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{C.8a}$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma} F_{\nu\sigma} \right) = \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0 \tag{C.8b}$$

on la primera (llei de Gauss-Ampère) uneix les equacions D.1a i D.1d i la segona (llei de Gauss-Faraday) les equacions D.1b i D.1c.*

Per completitut, veiem que li passa a la força de Lorentz en la notació covariant

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q \left(\frac{\partial(u^\nu A_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} \right) = q F_{\mu\nu} u^\nu \tag{C.9}$$

on la part espacial de la força F_i està relacionada amb la força ordinària f_i per $F_i = \gamma f_i$

*El símbol [] al subíndex de la segona equació indica que la suma és fa sobre la part antisimètrica només.